

А. И. ОСТРОВСКИЙ
Б. А. КОРДЕМСКИЙ



Ф И З М А Т Г И З • 1960

А. И. ОСТРОВСКИЙ и Б. А. КОРДЕМСКИЙ

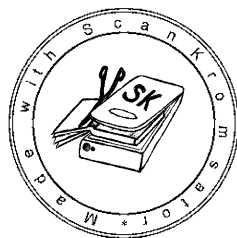
ЕОМЕТРИЯ
ПОМОГАЕТ
АРИФМЕТИКЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

В этой книге рассматривается применение некоторых геометрических (графических и графико-вычислительных) приемов к решению разнообразных арифметических и алгебраических задач. Решение задач осуществляется при помощи чертежей — диаграмм и графиков. Построение этих чертежей дает возможность «увидеть» задачу — установить и исследовать связи, существующие между величинами, входящими в задачу, выбрать кратчайший путь решения.

Книга предназначена для самостоятельной работы и для школьных математических кружков.



Scan AAW

*Александр Исаакович Островский
и Борис Анастасьевич Гордемский.*

Геометрия помогает арифметике.

Редактор *И. Н. Бронштейн*

Техн. редактор *Н. Я. Муранова*

Корректор *З. В. Моисеева*

Сдано в набор 1/IX 1958 г. Подписано к печати 3/XI 1959 г. Бумага 70×92¹/₁₆. Физ. печ. л. 10,50. Условн. печ. л. 12,28. Уч.-изд. л. 9,42. Тираж 125 000 экз. Т-11037. Цена книги 4 р. 20 к. Заказ № 3524.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Воровая, 28.



Предисловие



Диаграмма — это чертеж или рисунок, на котором условно изображены в виде отдельных фигур различные значения одной и той же величины или нескольких сравнимых величин.

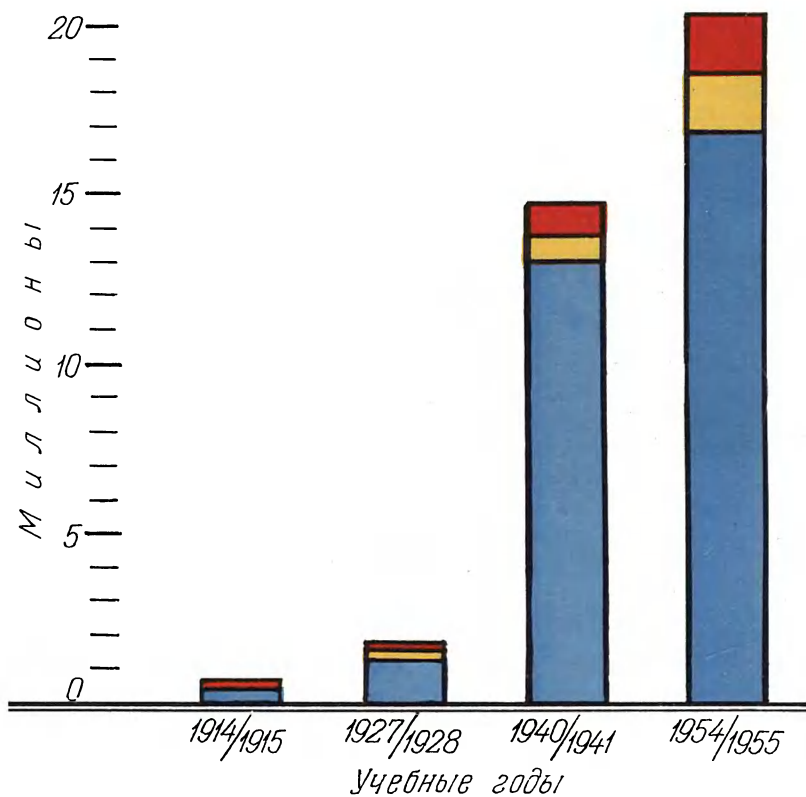
Так, например, рис. 1 является диаграммой числа учащихся в 5—10 классах средних учебных заведений на территории СССР за несколько лет¹⁾.

На рис. 2 представлена диаграмма сравнительной длины крупнейших рек СССР. Она напоминает нам, что самая длинная река в нашей стране — Лена.

График — это обычно некоторая линия (реже — совокупность отдельных точек), определенным образом расположенная относительно осей координат.

График удобен для изображения связи между двумя величинами, из которых одна является аргументом, а другая — функцией. Каждое значение аргумента является абсциссой некоторой точки графика, а соответствующее значение функции — ординатой той же точки. Например, на рис. 3 изображены графики среднего веса и роста детей в возрасте до 7 лет.

¹⁾ ЦСУ, Культурное строительство СССР, статистический сборник, 1956 г., стр. 6—7.



- В семилетних и средних школах
- В школах рабочей молодежи, сельской молодежи и школах взрослых
- В средних специальных учебных заведениях

Рис. 1.

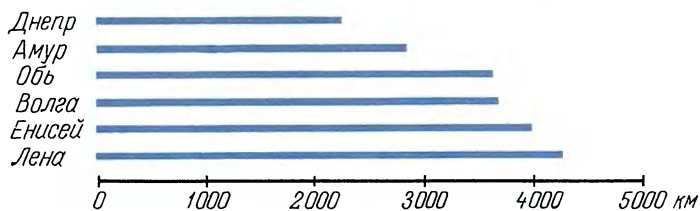


Рис. 2.

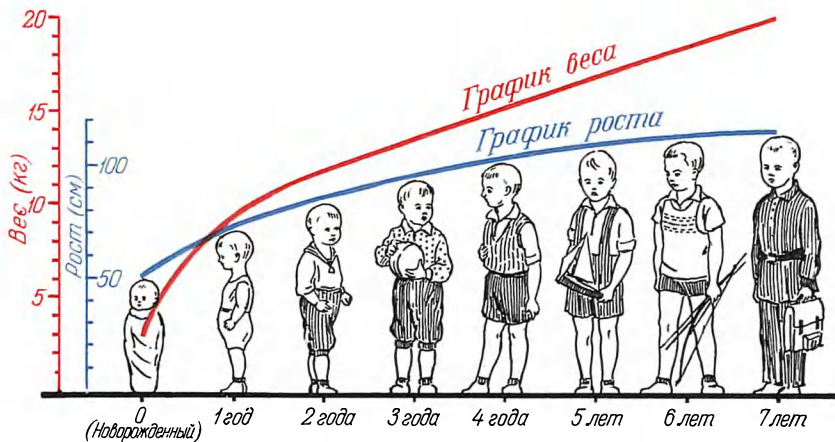


Рис. 3.

Диаграммы и графики могут быть использованы, однако, и в качестве одного из средств решения некоторых арифметических и алгебраических задач. Это будет показано в нашей книге.

Применяя *диаграммы* к решению задач, мы будем изображать подходящими геометрическими фигурами (часто даже просто отрезками) численные значения величин, входящих в условие задачи; действия над числами мы заменим соответствующими построениями на диаграмме. Например, если по условию задачи все имеющиеся яблоки должны быть разделены на три равные части, то мы начертим произвольный отрезок, условно изображающий данное количество яблок, и решение задачи будет состоять лишь в делении этого отрезка на три равные части. Когда это потребуются, будут и более сложные построения.

Применению диаграмм к решению задач посвящены первые две главы книги.

В тех случаях, когда в задаче идет речь о двух величинах, связанных между собой функциональной зависимостью, мы используем для решения задачи *график* или несколько графиков на одном чертеже.

Графики удобно строить на миллиметровой бумаге («миллиметровке»), или на бумаге «в клеточку».

Применению графиков к решению задач посвящены остальные четыре главы книги; при этом мы ограничились такими типами задач, для решения которых достаточны лишь прямолинейные графики.

В нескольких случаях мы дали решение одной и той же задачи в двух главах: один раз — с использованием диаграммы, а другой раз — с использованием графика.

Построение диаграмм и графиков, а также применение их к решению арифметических и алгебраических задач основаны на законах геометрии; вот почему мы и назвали книгу «Геометрия помогает арифметике».

Решение геометрических задач, как известно, осуществляется двумя приемами: либо точными *построениями* при помощи инструментов (конструктивный прием), либо обоснованными *вычислениями*; во втором случае вместо точного чертежа можно ограничиться лишь наброском и точными обоснованиями (вычислительный прием).

Эти же приемы используются и в решении арифметических задач геометрическими способами:

1) *Конструктивный прием* (чисто графический). Диаграмма или график вычерчивается как можно более точно непосредственно по значениям величин, входящих в условие задачи. Построения делаются циркулем, линейкой, угольником на миллиметровой бумаге или бумаге в клеточку. Ответ получается обычно приближенный, но приемлемый для практических целей; мы находим его при помощи измерений длин отрезков или других элементов чертежа, или просто «читаем» ответ на чертеже.

2) *Вычислительный прием* (графико-вычислительный). Диаграмма или график применяется как условное изображение связи между рассматриваемыми величинами. В этом случае чертеж выполняется от руки — в виде наброска, эскиза. Решение задачи осуществляется аналитически, путем вычислений, но основывается на точных геометрических соотношениях.

Решая задачи, мы в этой книге, как правило, избираем один из этих приемов: либо конструктивный, либо вычислительный; иногда, для сопоставления, применяем и оба приема.

В конце каждой главы помещены задачи для упражнений. Рекомендуем читателю решать эти задачи различными способами: как теми, которые описаны в книге, так и ранее знакомыми — арифметическими и алгебраическими. (Если материал второй главы покажется при первом чтении трудным, можно перейти к следующим главам.)

Конечно, самостоятельное решение некоторых задач при помощи геометрических средств требует известного навыка и изобретательности; эти качества будут вырабатываться у читателя в процессе работы над книгой. Мы надеемся, что изящное решение, полученное самостоятельно, доставит удовольствие читателю.

Применение диаграмм и графиков к решению задач может в одних случаях почти полностью заменить чисто вычислительные приемы, а в других — облегчить наилучший выбор неизвестного для составления уравнения, или подсказать ход рассуждений для отыскания арифметического решения.

Очень важное достоинство геометрического решения задачи — в его наглядности: на диаграмме или графике видна связь между величинами, входящими в условие задачи; чертеж помогает расширить задачу — поставить и решить более общие вопросы, глубже

проникнуть в существо задачи, оценить реальность результата и промежуточных действий. Особенно целесообразно применение диаграмм и графиков в тех случаях, когда требуется ответить не на один, а на несколько вопросов.


Приведенные в этой книге условия задач взяты в большинстве случаев из распространенных задачников и других учебных пособий и книг. Кроме того, в книге дано около полутора десятков новых задач, которые хорошо решаются с помощью геометрии ¹⁾.

Замысел книги принадлежит А. И. Островскому; им же дано графическое решение всех задач.

Авторы просят читателей присылать свои замечания по адресу издательства (Москва, В-71, Ленинский проспект, д. 15, Физматгиз, редакция математики).

А. Островский, Б. Кордемский

¹⁾ В конце условия большинства задач указано сокращенно, из какой книги оно взято; перечень этих книг и объяснение сокращенных обозначений приведены на стр. 167. В условия нескольких задач пришлось ввести некоторые уточнения. Задачи, не имеющие указания на источник, придуманы А. И. Островским.





Глава первая

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИАГРАММ

Простейшим геометрическим изображением величины и ее частей, входящих в условие задачи, является так называемая *одномерная* (или *линейная*) *диаграмма*. Одномерная диаграмма — это обычно отрезок или несколько отрезков, длины которых соответствуют численным значениям рассматриваемой величины (отрезки могут быть заменены прямоугольниками одинаковой ширины).

БРАТЬЯ И СЕСТРЫ

Мальчика спросили, сколько у него братьев и сестер. Он ответил: «Столько же братьев, сколько и сестер». Тогда спросили сестру, сколько у нее братьев и сестер. Она ответила: «У меня сестер вдвое меньше, чем братьев». Сколько было братьев и сколько было сестер? (Мальчик и девочка, отвечая на вопросы, не считают себя.)

(Б., № 2240)

Решение

Построим диаграммы. Число мальчиков будем изображать синими отрезками, а девочек — красными.

Мальчик сказал: «У меня столько же братьев, сколько и сестер». Нарисуем мальчика и условно изобразим равными отрезками:

слева от него — всех его братьев, а справа от него — всех его сестер (рис. 4. № 1). При этом отрезок «мои сестры» (сестры мальчика) изображает неизвестное число всех девочек.

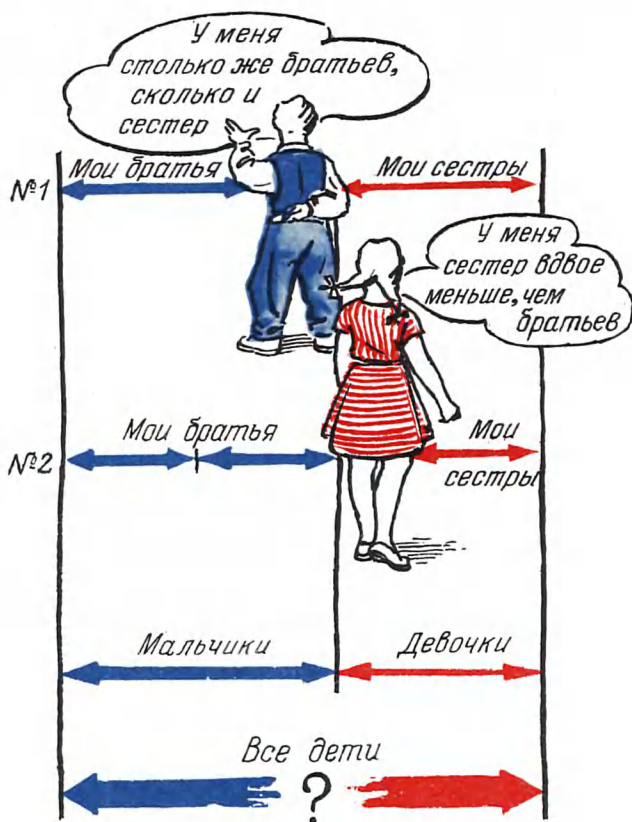


Рис. 4.

Девочка сказала: «У меня сестер вдвое меньше, чем братьев». Нарисуем девочку (конечно, в группе «девочки») и условно изобразим отрезками: слева от нее — всех ее братьев, а справа — всех ее сестер. На этой диаграмме (№ 2) отрезок «мои братья» должен быть в два раза больше, чем отрезок «мои сестры». Здесь отрезок «мои братья» (братья девочки) изображает неизвестное число всех мальчиков.

Так как общее число мальчиков и девочек вполне определенное (хотя еще и неизвестное), то длина всей диаграммы № 1 (вместе с отрезком, занятым фигуркой мальчика) равна длине всей диаграммы № 2 (вместе с отрезком, занятым фигуркой девочки).

Пусть мальчик и девочка «уйдут» из диаграмм. Сомкнем оставшиеся отрезки на каждой диаграмме. Образовались две новые

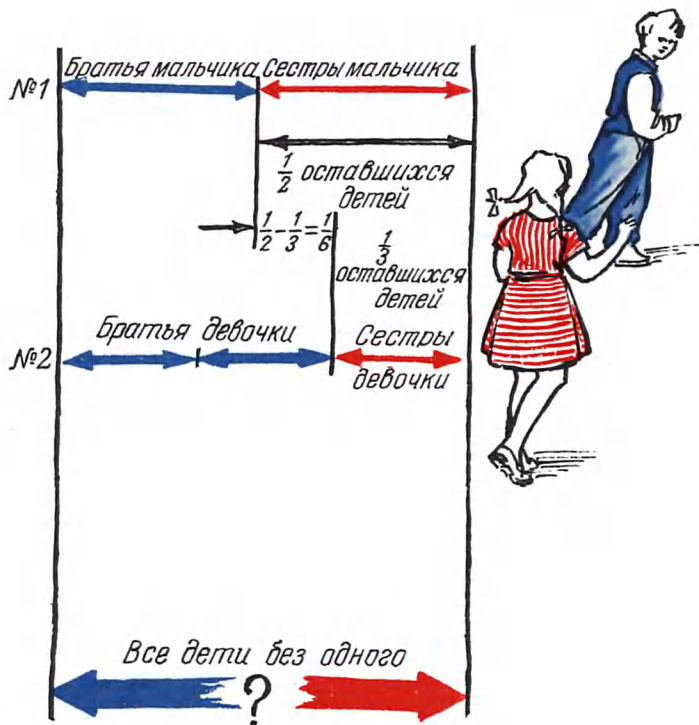


Рис. 5.

диаграммы (рис. 5) опять-таки одинаковой длины, так как в обоих случаях они изображают число оставшихся детей, которое на единицу меньше действительного числа детей.

Если ушел мальчик, то девочки (красный отрезок) составляют половину общего числа оставшихся детей; если же ушел не мальчик, а ушла девочка, то теперь девочки (красный отрезок) составляют только одну треть того же числа. Отсюда следует, что

разность красных отрезков на рис. 5 изображает одну девочку, которая составляет $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ часть от общего числа всех детей, уменьшенного на единицу.

Отсюда общее число всех детей без одного равно 6; всего детей

$$6 + 1 = 7;$$

из них:

$$\text{девочек } \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,$$

$$\text{мальчиков } 7 - 3 = 4.$$

ОБЕД ВТРОЕМ

Коля уплатил в кассу столовой за три блюда, а Саша — за два блюда (все пять блюд — одинаковой стоимости). Только они сели за стол, как к ним присоединился Юра, и они втроем съели поровну все пять блюд. При расчете приятелей между собой выяснилось, что Юра должен уплатить за съеденное им 5 рублей. Сколько из этих денег следует Коле и сколько Саше?

(Б., № 2241)

Решение

На листке клетчатой бумаги изобразим условие задачи в виде диаграммы. Зная, что полную стоимость обеда придется разделить поровну между всеми тремя приятелями, изобразим стоимость каждого блюда отрезком длиной в три клетки (рис. 6). Отрезок *AB* — стоимость трех блюд, оплаченных Колей; отрезок *BC* — стоимость двух блюд, оплаченных Сашей. Следовательно, отрезок *AC* — стоимость пяти блюд, съеденных всеми тремя.

По условию задачи, юрина доля стоимости всего обеда составляет 5 руб. Сколько из них он должен отдать Коле и сколько — Саше?

Ответ легко получить на самой диаграмме. Разделим отрезок *AC* на три равные части. Каждая часть изображает стоимость съеденного каждым из трех приятелей. Пусть средний из этих отрезков изображает юрину долю стоимости всего обеда — 5 руб. Диаграмма показывает, что каждая клеточка на рисунке обозначает

1 рубль. Проведем через точку *В* вертикальную прямую. Она разделит средний из трех отрезков (долю Юры) на две части: левую — длиной в 4 клетки, примыкающую к доле Коли, и правую — длиной в 1 клетку, примыкающую к доле Саши.

Следовательно, Коля должен получить с Юры 4 руб., а Саша — 1 рубль.

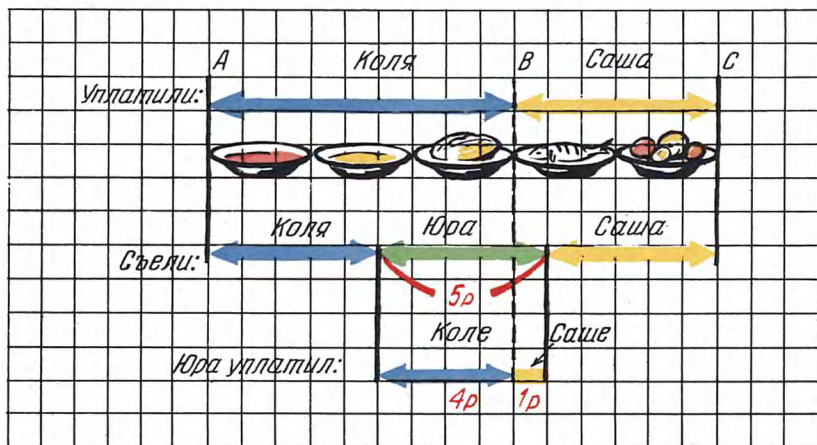


Рис. 6.

Этот результат, полученный наглядным геометрическим способом, можно проверить при помощи несложных вычислений.

Юра уплатил за свою долю обеда 5 руб. Следовательно, полная стоимость всего обеда равна $5 \times 3 = 15$ руб.

Стоимость одного блюда равна $15 : 5 = 3$ руб.

Коля уплатил в кассу $3 \cdot 3 = 9$ руб.

Саша уплатил в кассу $3 \cdot 2 = 6$ руб.

Следовательно, Юра должен отдать:

Коле $9 - 5 = 4$ руб.,

Саше $6 - 5 = 1$ рубль.

Как видим, результат тот же.

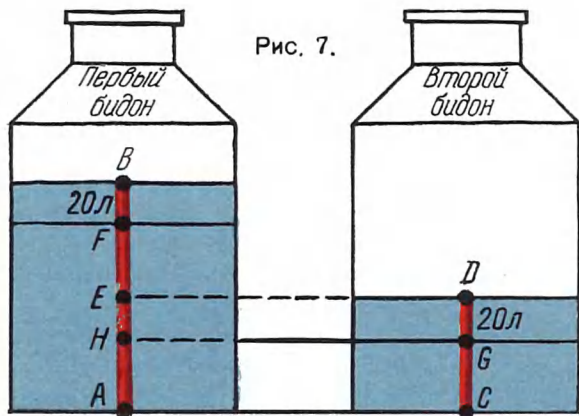
ДВА БИДОНА

В одном бидоне вдвое больше молока, чем в другом. Когда из обоих бидонов отлили по 20 литров молока, то в первом бидоне оказалось втрое больше молока, чем во втором. Сколько литров молока было первоначально в каждом бидоне?

(Б., № 2162)

Решение

Начертим прямую AC и два перпендикуляра к ней: AB и CD , первый вдвое длиннее второго (рис. 7). Пусть точка E — середина отрезка AB ; тогда $AE = EB = CD$. Отрезки AB и CD показывают первоначальное количество молока в каждом из бидонов.



От точек B и D вниз отложим произвольные, но равные отрезки BF и DG , изображающие равные количества отлитого молока (по 20 л).

Тогда отрезки AF и CG представят остатки молока в бидонах; при этом, в соответствии с условием задачи, должно быть $AF = 3CG$, то есть отрезок AF должен содержать в себе три отрезка CG .

Удалим из отрезка AF отрезок EF , равный отрезку CG (сообразите, почему $EF = CG$?); тогда оставшийся отрезок AE должен содержать в себе только 2 CG .

Соединим прямолинейным отрезком точки D и E и проведем $GH \parallel DE$. Удалим из отрезка AE отрезок $AH = CG$; тогда оставшийся отрезок $HE = CG$; но $HE = 20$ л; поэтому и $CG = 20$ л.

Итак, во втором бидоне было первоначально $20 + 20 = 40$ л,
в первом » » » $40 \times 2 = 80$ л.

Очевидно, что на нашем эскизе отрезки **BF** и **DG** маловаты для точного изображения 20 л; это немного испортило чертеж, но не помешало найти правильное решение. Теперь желающие могут сделать и точный

Первый

сосуд

Второй

сосуд

ДВА СОСУДА

Два сосуда, объемом по 540 л, наполнены водой. Из первого вытекает каждую минуту 25 л, из второго 15 л. Через сколько минут во втором сосуде останется в 6 раз больше воды, чем в первом?

(Московская математическая олимпиада
1954 г. для учеников пятых классов.)

Решение

Решим эту задачу двумя различными способами¹⁾).

1-й способ (арифметический).

Так как задача предназначена для учащихся пятых классов, то рассмотрим прежде всего ее арифметическое решение. Будем сопровождать решение задачи построением подходящих диаграмм.

На первой диаграмме (рис. 8, «Сначала») два равных прямоугольника изображают два данных одинаковых сосуда, наполненных водой.

Так как по условию вода вытекает из сосудов, то через некоторое время только часть каждого сосуда будет занята водой. Вторая диаграмма, «Потом», изображает положение уровней воды в тот момент, когда

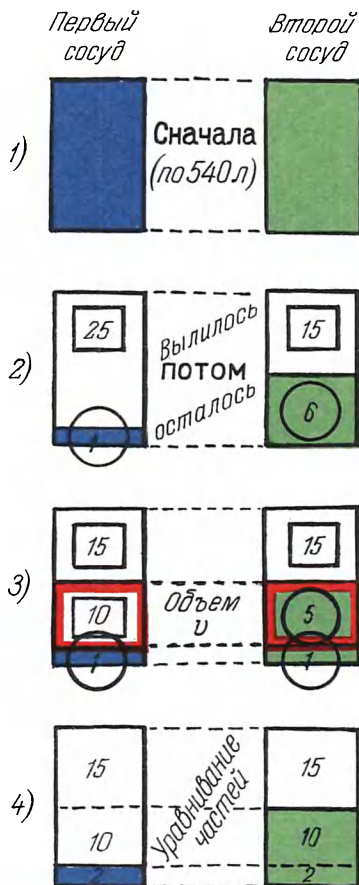


Рис. 8.

¹⁾ В последней главе книги будет дан еще один способ решения этой задачи (стр. 140).

остатки воды в сосудах относятся как 1:6 (см. цифры в кружочках). Объемы вылившейся воды относятся как заданные скорости истечения, т. е. как 25:15; следовательно, незакрашенные части прямоугольников относятся как 25:15 (см. цифры в квадратиках).

На третьей диаграмме изображено следующее:

Объем воды, вылившейся из первого сосуда, превышает объем воды, вылившейся из второго сосуда, на некоторую величину v ; этот объем v содержит $25-15=10$ частей вылившейся воды.

Объем воды, оставшейся во втором сосуда, превышает объем воды, оставшейся в первом сосуда, на ту же величину v ; но этот объем v содержит $6-1=5$ частей оставшейся воды. Таким образом, один и тот же объем v определяется разным числом частей; причина этого в том, что одна часть вылившейся воды не равна одной части оставшейся воды.

Но мы можем уравнивать эти части. Для этого достаточно заметить отношение объемов оставшейся воды (т. е. отношение 1:6) равным ему отношением 2:12; тогда остаток будет также равен $12-2=10$ частям. Это уравнивание изображено на четвертой диаграмме.

Теперь все части равноценны и в каждом сосуда по $15+10+2=27$ частей. Каждая часть содержит по $540:27=20$ л.

Так как из первого сосуда вылилось 25 частей, что составляет 20×25 л, то на это потребовалось $\frac{20 \times 25}{25} = 20$ мин.

2-й способ (номографический).

Особенно интересны (и очень полезны для практических расчетов) подвижные диаграммы, или *номограммы*. Пример применения такого рода диаграмм рассмотрим на той же задаче о двух сосудах.

Проведем на листе миллиметровой бумаги горизонтально произвольный отрезок AB и на его продолжении справа отметим такую точку K , расстояния которой от точек A и B относились бы как скорости истечения воды из сосудов, т. е. как $25:15=5:3$ (рис. 9):

$$KA:KB=5:3.$$

Из точек A и B проведем два равных вертикальных отрезка I и II в произвольном масштабе (например, $1 \text{ мм} = 5 \text{ л}$). Равенство этих отрезков означает, что объемы воды в обоих сосудах одинаковы. Справа, на одном уровне с отрезками I и II, проведем еще два

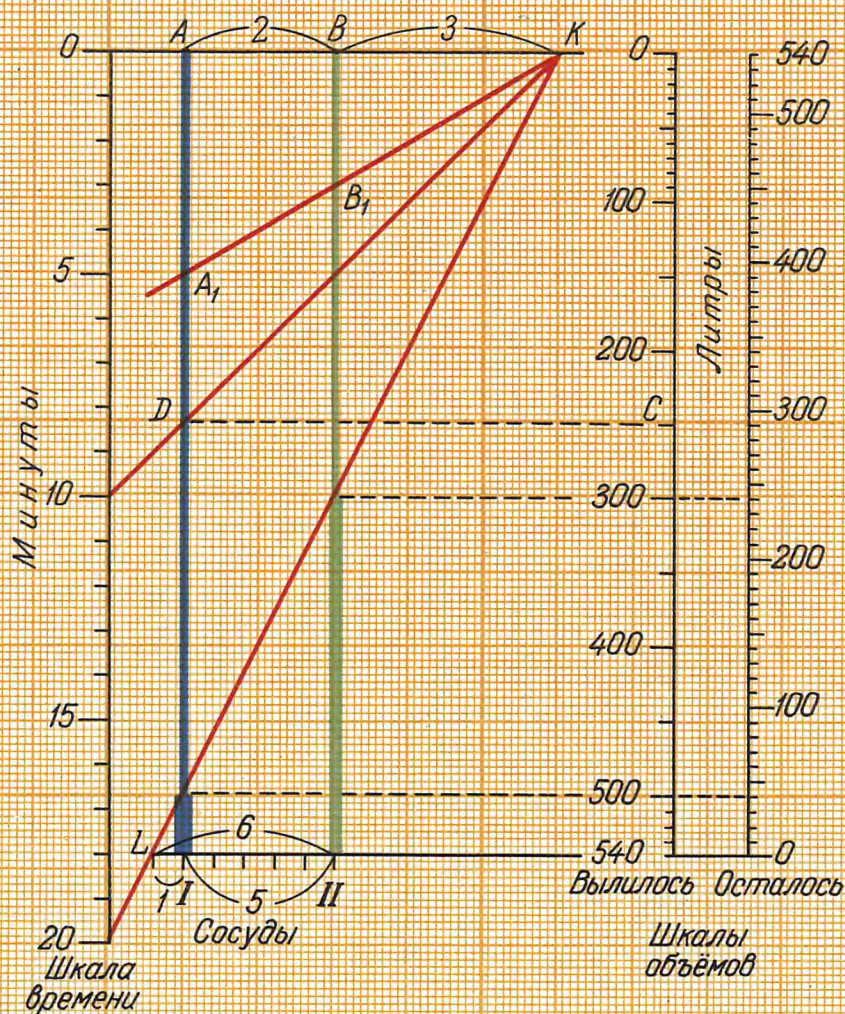


Рис. 9.

таких же отрезка «вылилось» и «осталось» с делениями, на которых можно отсчитывать объемы (в литрах) вылившейся воды (нумерация делений сверху вниз) и оставшейся воды (нумерация делений снизу вверх).

Отрезки «вылилось» и «осталось» с делениями назовем *шкалами объемов*.

Любой луч (на рис. 9 красный), проведенный из точки *K* и пересекающий отрезки I и II, будет «линией уровней» воды, остающейся в сосудах в тот или иной момент времени. В самом деле, каждый такой луч рассекает оба отрезка на две части: верхнюю и нижнюю. Верхняя часть отрезка изображает количество воды, вылившейся из соответствующего сосуда к данному моменту времени, а нижняя — количество оставшейся воды. Так как истечение воды из сосудов начинается одновременно и скорости истечения относятся, по условию, как 5:3, то в таком же отношении находятся и объемы воды, вылившейся из сосудов, в любой момент времени. Следовательно, в таком же отношении должны находиться и верхние части отрезков I и II, отсекаемые красной «линией уровней» (например, $AA_1:BB_1 = 5:3$). Но так у нас на чертеже и получается, о чем свидетельствует подобие образовавшихся треугольников ($\triangle KAA_1 \sim \triangle KBB_1$).

Построим теперь слева *шкалу времени*, протекшего с того момента, как из сосудов начала вытекать вода. Разметим ее следующим образом. Помечаем нуль шкалы на уровне верха отрезков I и II. Далее, по условию, например, за 10 минут из первого сосуда выливается $25 \cdot 10 = 250$ л воды; находим на шкале объемов «вылилось» отметку 250 л (точка *C*) и соответствующую ей точку *D* на отрезке I; проводим луч *KD* через эту точку; пересечение этого луча со шкалой времени отмечаем цифрой 10 (мин.). По двум точкам 0 и 10 нетрудно разметить и всю шкалу времени; каждая минута — одна десятая часть отрезка 0—10.

По условию задачи требуется найти момент, когда остатки воды в сосудах будут относиться как 1:6. Поэтому мы отметим на горизонтали, проходящей через нижние концы отрезков I и II, такую точку *L*, чтобы ее расстояния от отрезков I и II также находились в отношении 1:6.

Теперь красный луч *KL* (или линейка, приложенная к точкам *K* и *L*) сам укажет на шкале времени тот момент, когда будет выполнено условие задачи.

Читаем на шкале времени ответ: во втором сосуде останется в 6 раз больше воды, чем в первом, через 20 мин.

При помощи диаграммы, изображенной на рис. 9, можно ответить и на другие вопросы. Так, например, на шкале объемов можно прочитать, сколько воды вылилось за эти 20 мин. из каждого сосуда (500 л из первого и 300 л из второго); сколько воды осталось в каждом сосуде (40 л в первом и 240 л во втором).

Без дополнительных построений, лишь поворачивая луч (линейку) вокруг точки *K*, можно сразу получить готовые ответы на самые разнообразные дополнительные вопросы к данной задаче. Например, легко увидеть, сколько воды останется в каждом сосуде через 5 мин.; когда вытечет вся вода из первого сосуда, из второго сосуда; сколько воды останется во втором сосуде в тот момент, когда из первого вытечет вся вода, и т. д.

Подобного рода подвижные диаграммы со шкалами, которые позволяют быстро получать готовые решения ряда однотипных задач при помощи лишь простого сопоставления отметок на шкалах, называются *номограммами*.

КОСЦЫ

Профессор физики А. В. Цингер в своих воспоминаниях о Л. Н. Толстом приводит задачу, сообщенную ему великим писателем:

«Артели косцов надо было скосить два луга — один вдвое более другого. Половину дня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный на другой день одним косцом, проработавшим целый день.

Сколько косцов было в артели?»

Предполагается, что полдень делит рабочий день косцов на две равные части; производительность труда всех косцов одинакова.

По-видимому, А. В. Цингер предложил Льву Николаевичу какое-то наглядно-геометрическое решение этой задачи, так как далее в своих воспоминаниях он пишет:

«Берем клочок бумаги, чертим. На чертеже Лев Николаевич сразу ясно понимает неожиданную простоту задачи.

— Ах, как хорошо,— говорит он. Теперь все совершенно просто и ясно.

И Лев Николаевич идет рассказывать задачу гостям за почетным столиком графини».

(Из книги «Л. Н. Толстой в воспоминаниях современников»)

Решение

Нам не известно, как именно была решена тогда эта задача. Мы предлагаем следующее решение.

Пусть число косцов K .

За первую половину дня K косцов скосят на большом лугу площадь, которую мы изобразим прямоугольником с высотой,

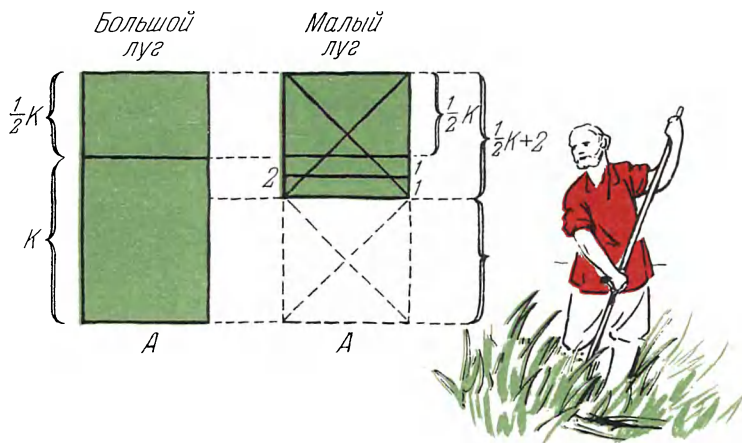


Рис. 10.

равной K . Основание прямоугольника (произвольное) обозначим через A (рис. 10).

За вторую половину дня половина косцов (т. е. $\frac{1}{2}K$) скосят на том же лугу площадь, соответствующую прямоугольнику со сторонами A и $\frac{1}{2}K$. Следовательно, левый составной прямоугольник соответствует площади большого луга. Высота этого прямоугольника равна $\frac{3}{2}K$.

За вторую половину первого дня $\frac{1}{2}K$ косцов скосят на малом лугу площадь, соответствующую прямоугольнику со сторонами A и $\frac{1}{2}K$. За две половины второго дня один косец скосит на втором лугу площадь, соответствующую прямоугольнику, одна сторона которого по-прежнему A , а другая равна $1+1=2$. Правый составной прямоугольник имеет высоту $\frac{1}{2}K+2$ и соответствует площади малого луга.

По условию, малый луг вдвое меньше большого луга, следовательно, $\frac{1}{2}K+2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}K$ или $\frac{1}{4}K=2$. Отсюда число косцов $K=8$.

НАСЛЕДСТВО

Некто оставил по смерти своей несколько детей и имение, которое дети делят между собой так, что первый из них берет 100 талеров¹⁾ и еще 10-ю часть остального имения,

второй берет 200 талеров и сверх того 10-ю часть остального имения,
 третий » 300 » » » » » » »
 четвертый » 400 » » » » » » »

и т. д.

и по сем дележе находится, что все имение разделено было равно²⁾ между ними. Спрашивается, сколь велико было имение, сколько детей было и сколько каждый из них взял.

(Универсальная арифметика Леонарда Эйлера, переведенная с немецкого подлинника П. Иноходцевым и И. Юдиным, 1788 г., т. II, задача № 604.)

Решение

В отличие от того решения этой старинной задачи, которое приведено в книге Эйлера, покажем здесь геометрический прием решения, обобщив задачу следующим образом: первый наследник получил

¹⁾ Талер — старинная немецкая серебряная монета.

²⁾ То есть поровну.

b талеров и $\frac{1}{n}$ часть первого остатка; второй — $2b$ талеров и $\frac{1}{n}$ часть второго остатка; третий — $3b$ талеров и $\frac{1}{n}$ часть третьего остатка и т. д.

На рис. 11 горизонтальный отрезок AB изображает размер всего наследства, и точки $C', C'', C''' \dots$ делят его на x равных частей

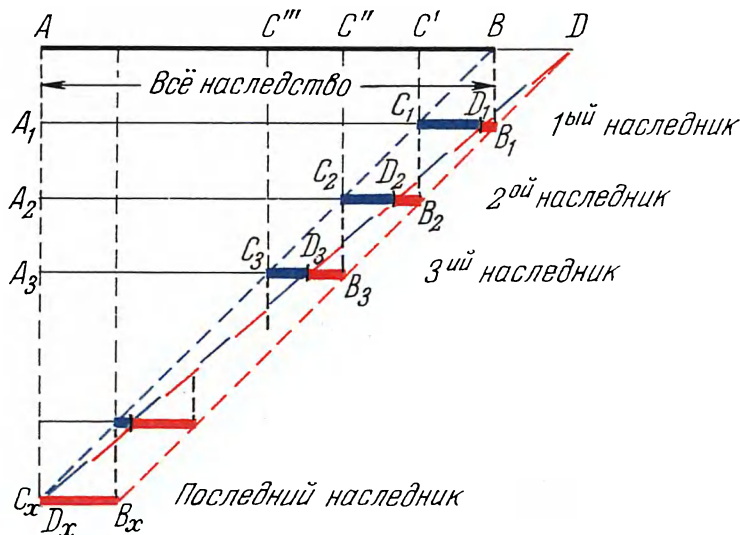


Рис. 11.

(x — искомое число наследников); в таком случае сумма, полученная первым наследником, изобразится отрезком BC' , вторым — $C'C''$ и т. д.

Представим процесс раздела наследства с помощью ломаной линии, имеющей вид лестницы с одинаковыми ступенями, число которых равно числу сыновей. Сумма, полученная первым наследником, изобразится отрезком B_1C_1 ; сумма, полученная вторым наследником, — отрезком B_2C_2 , третьим — $B_3C_3 \dots$ и т. д., последним — B_xC_x . Все эти отрезки равны и параллельны. Очевидно, что точки C_{x-1}, \dots, C_2, C_1 и B лежат на одной прямой, а точки B_{x-1}, \dots, B_3, B_2 и B_1 — на другой прямой, параллельной предыдущей.

Продолжим прямые AB и B_xB_1 до пересечения в точке D и соединим точки D и C_x . Прямая DC_x разобьет каждый из равных отрез-

ков $B_1C_1, B_2C_2 \dots$ точками D_1, D_2, \dots на две части; проследим за изменениями каждой из них.

Что представляет собой правая (красная) часть?

Так как $AA_2 = 2AA_1$, то $D_2B_2 = 2D_1B_1$.

Аналогично

$$D_3B_3 = 3D_1B_1, \dots, D_xB_x = xD_1B_1.$$

Но, по условию,

первый получил b талеров и еще $\frac{1}{n}$ остатка,

второй » $2b$ » » » $\frac{1}{n}$ »

.....

последний » xb » и ... больше ничего,
(x -овый)

так как после того, как последний наследник получит xb талеров, вся сумма наследства будет исчерпана и никакого остатка не будет.

Отсюда следует, что $D_1B_1 = b$.

Теперь рассмотрим левые (синие) части.

По условию, первый наследник получил b талеров (отрезок B_1D_1) и $\frac{1}{n}$ остатка; следовательно, $C_1D_1 = \frac{1}{n} A_1D_1$. В таком случае $BD = \frac{1}{n} AD$ или $AD = n \cdot BD$, откуда $AB = (n-1) \cdot BD$. Но $AB = x \cdot BD$; следовательно, $x = n-1$.

Итак, мы определили и число наследников; оно не зависит от b .

Каждый наследник получил по $xb = (n-1)b$ талеров.

Всего денег было $AB = (n-1) \cdot BD = (n-1)^2 b$ талеров.

По первоначальному условию $n=10$, $b=100$; следовательно, детей было 9, все имение стоило 8100 талеров; каждый наследник получил по 900 талеров.

ПЕРЕЛИВАНИЕ ВОДЫ

В двух сосудах вместе имеется l л воды; из первого сосуда переливают половину находящейся в нем воды во второй сосуд; затем из второго сосуда переливают половину получившегося в нем объема воды обратно в первый сосуд; далее, из первого сосуда переливают во второй половину находящейся в нем воды и так «до бесконечности». Как в конце концов распределится вода между обоими сосудами?

Решение

Очень часто, не подумав, отвечают: «распределится поровну», либо: «зависит от того, сколько воды было в каждом сосуде сначала». Однако ни тот, ни другой ответ не верен.

По условию известно лишь общее начальное количество воды в обоих сосудах (l л), но не сказано, сколько воды в каждом сосуде. Начертим горизонтальный отрезок AB произвольной длины, изображающий l л воды (рис. 12).

Так как при всех переливаниях общее количество воды в двух сосудах остается неизменным, то любая точка C внутри этого отрезка покажет некоторое распределение воды между двумя сосудами. Пусть всякий раз левая часть отрезка AB (синий отрезок AC) представляет объем воды в первом сосуде; тогда правая часть (желтый отрезок CB) будет представлять объем воды во втором.

В результате переливания воды из первого сосуда во второй точка C перемещается влево, а в результате переливания из второго сосуда в первый — вправо.

Какие места на прямой AB будет занимать при этом точка C ?

Построим диаграмму переливаний. Для этого надо начертить несколько отрезков такой же длины, что и отрезок AB , на произвольных, но равных расстояниях один от другого, расположив их концы на общих вертикалях.

Пусть точка C_0 на отрезке A_0B_0 указывает некоторое начальное распределение воды; при этом синий отрезок A_0C_0 изображает количество воды в первом сосуде, а желтый отрезок C_0B_0 — во втором. Точки C_1, C_2, C_3, \dots на отрезках $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ указывают распределение воды по сосудам соответственно после первого, второго, третьего, ... переливаний.

Эти точки легко получить построением. Соединив прямолинейным отрезком точки C_0 и A_2 , получим в пересечении с отрезком A_1B_1 искомую точку C_1 . В самом деле, $A_1C_1 = \frac{1}{2} A_0C_0$ (почему?), а это и означает, согласно условию задачи, что после первого переливания в первом сосуде осталась только половина первоначального количества воды. Соединив теперь точки C_1 и B_3 , получим в пересечении с отрезком A_2B_2 искомую точку C_2 такую, что $C_2B_2 = \frac{1}{2} C_1B_1$,

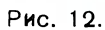


Рис. 12.

где отрезок C_2B_2 показывает количество воды, оставшейся во втором сосуде после второго переливания. Аналогичным построением получаем точки C_3, C_4 и т. д.

Проследим за последовательными положениями точки C , причем не после каждого переливания, а (как подсказывает диаграмма) через одно переливание.

В таком случае образуются две последовательности длин желтых отрезков:

$$B_0C_0, B_2C_2, B_4C_4, \dots \text{ и } B_1C_1, B_3C_3, B_5C_5, \dots$$

и, соответственно, две последовательности синих отрезков:

$$A_0C_0, A_2C_2, A_4C_4, \dots \text{ и } A_1C_1, A_3C_3, A_5C_5, \dots$$

Любопытно, что каждая из этих последовательностей имеет предел, который не зависит от начального положения точки C_0 на отрезке A_0B_0 , т. е. не зависит от начального распределения воды по сосудам. Докажем это.

В условиях нашей задачи могут иметь место только три случая:

$$1) B_0C_0 > \frac{1}{3}l \quad \left(B_0C_0 = \frac{1}{3}l + \alpha \right),$$

$$2) B_0C_0 = \frac{1}{3}l \quad \left(B_0C_0 = \frac{1}{3}l \right),$$

$$3) B_0C_0 < \frac{1}{3}l \quad \left(B_0C_0 = \frac{1}{3}l - \alpha \right),$$

т. е. первоначальное количество воды во втором сосуде либо больше, либо равно, либо меньше одной трети общего количества воды.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Первый случай (изображенный на рис. 12). Пусть $B_0C_0 = \frac{1}{3}l + \alpha$. Так как $A_0C_0 + B_0C_0 = l$, то

$$A_0C_0 = l - B_0C_0 = \frac{2}{3}l - \alpha;$$

$$A_1C_1 = \frac{1}{2}A_0C_0 = \frac{1}{3}l - \frac{\alpha}{2};$$

$$B_1C_1 = l - A_1C_1 = \frac{2}{3}l + \frac{\alpha}{2};$$

$$B_2C_2 = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{3}l + \frac{\alpha}{4}.$$

Продолжая эти вычисления, найдем для последовательностей длин желтых отрезков следующие значения:

$$\begin{aligned} B_0 C_0 &= \frac{1}{3} l + \alpha, & B_1 C_1 &= \frac{2}{3} l + \frac{\alpha}{2}, \\ B_2 C_2 &= \frac{1}{3} l + \frac{\alpha}{2^2}, & B_3 C_3 &= \frac{2}{3} l + \frac{\alpha}{2^3}, \\ B_4 C_4 &= \frac{1}{3} l + \frac{\alpha}{2^4}, & B_5 C_5 &= \frac{2}{3} l + \frac{\alpha}{2^5}, \\ B_6 C_6 &= \frac{1}{3} l + \frac{\alpha}{2^6}, & B_7 C_7 &= \frac{2}{3} l + \frac{\alpha}{2^7}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Дробь с неизменным числителем α и безгранично увеличивающимся знаменателем стремится к нулю, и, следовательно, обе последовательности желтых отрезков имеют пределы:

$$\text{первая: } \frac{1}{3} l, \text{ вторая: } \frac{2}{3} l.$$

Аналогичными равенствами можно было бы выразить и обе последовательности синих отрезков, но и без этого ясно (из геометрических соображений), что каждая из них также имеет предел:

$$\begin{aligned} \text{последовательность } A_0 C_0, A_2 C_2, A_4 C_4, \dots \text{ стремится к } \frac{2}{3} l, \\ \text{а последовательность } A_1 C_1, A_3 C_3, A_5 C_5, \dots \text{ стремится к } \frac{1}{3} l. \end{aligned}$$

На нашей диаграмме можно увидеть этот процесс, если точки C_0, C_2, C_4, \dots соединить одной плавной кривой, а точки C_1, C_3, C_5, \dots — другой плавной кривой. Каждая из них приближается к одной из вертикалей, делящих отрезок $A_0 B_0$ на три равные части.

Итак, многократное повторение таких переливаний воды из одного сосуда в другой, о которых говорится в условии задачи, приближает распределение воды по сосудам к некоторому предельному состоянию, а именно: попеременно в каждом сосуде оказывается то одна треть всего количества воды $\left(\frac{1}{3} l\right)$, то две трети всего количества $\left(\frac{2}{3} l\right)$.

Ну, а если с самого начала во втором сосуде была ровно одна треть всего количества воды? Рассмотрим теперь этот случай.

Второй случай: $B_0C_0 = \frac{1}{3}l$. Теперь $A_0C_0 = \frac{2}{3}l$ и все точки C , очевидно, расположатся на двух вертикальных прямых, делящих отрезок A_0B_0 на три равные части, т. е. в этом случае сразу установится предельное состояние: $\frac{1}{3}l$ будет переходить из одного сосуда в другой без конца.

Третий случай: $B_0C_0 < \frac{1}{3}l$. Следует показать, что и теперь распределение воды по сосудам стремится точно к такому же предельному состоянию, как в первом случае. Убедитесь в этом самостоятельно, построив соответствующую диаграмму.

Во всех трех случаях результат один и тот же!

Обратите внимание на то, что некоторые последовательности отрезков стремятся каждая к своему пределу сверху, т. е. оставаясь все время больше своего предела, а другие последовательности стремятся к тем же пределам снизу, т. е. оставаясь каждая все время меньше своего предела.

Как изменяется количество воды, переходящее из сосуда в сосуд при переливании? Убедитесь в том, что и оно имеет предел, равный $\frac{1}{3}l$, приближаясь к этому пределу с разных сторон.

УПРАЖНЕНИЯ

Решите следующие задачи при помощи одномерных диаграмм:

ГАЛКИ. На трех деревьях уселось 36 галок. Когда с первого дерева перелетели на второе 6 галок, а со второго перелетели на третье 4 галки, то на всех трех деревьях галок осталось поровну. Сколько галок первоначально сидело на каждом дереве?

(П., гл. III, № 13)

ВОРОБЬИ. На двух кустах сидело 25 воробьев. После того как с первого куста перелетело на второй 5, а со второго совсем улетело 7 воробьев, на первом кусте осталось вдвое больше воробьев, чем на втором. Сколько воробьев было на каждом кусте первоначально?

(П., гл. III, № 36)

ОСЕЛ И МУЛ. Осел и мул шли рядом, нагруженные мешками. Осел говорит «Возьми у меня один мешок, тогда у нас будет поровну». Мул говорит: «Возьми у меня один мешок, тогда у меня будет вдвое меньше, чем у тебя». Сколько мешков тащил каждый из них?

(П., гл. III, № 76)





Глава вторая

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ДИАГРАММ

Очень часто рассматриваемая величина является произведением двух других величин. Например, вес груза равен произведению количества ящиков на вес одного ящика; стоимость покупки равна произведению количества купленных килограммов на цену одного килограмма; путь, пройденный при равномерном движении, равен произведению скорости на время и т. д.

С другой стороны, известно, что площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон.

Поэтому, в тех задачах, где одна из рассматриваемых величин является произведением двух других, целесообразно для наглядности представлять такое произведение в виде площади прямоугольника или параллелограмма, или треугольника, т. е. в виде *двумерной диаграммы*.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И НЕСКОЛЬКО ПОСТРОЕНИЙ

Применение двумерных диаграмм в качестве моделей решения арифметических задач потребует от нас выполнения геометрических построений несколько более сложных, чем они были в случае применения линейных диаграмм. Подготовим их заблаговременно, но прежде докажем одну вспомогательную теорему.

Теорема (рис. 13). Если через произвольную точку E диагонали AC прямоугольника¹⁾ $ABCD$ проведены прямые $FG \parallel AB$ и $HJ \parallel AD$, то

1) образовавшиеся при этом прямоугольники $HBGE$ и $FEJD$ (желтые) равновелики;

2) прямоугольники $ABGF$ (синий) и $AHJD$ (зеленый) также равновелики; кроме того:

3) отрезки FH , DB и JG параллельны.

Доказательство. 1) Диагональ AC делит каждый из трех прямоугольников $ABCD$, $AHEF$ и $EGCJ$ на два равных треугольника, т. е.

$$\triangle ABC = \triangle ADC, \quad \triangle AHE = \triangle AFE, \quad \triangle EGC = \triangle EJC.$$

Вычитая из первого равенства второе, а затем и третье равенство, получим:

площадь $HBGE$ равна площади $FEJD$.

2) Дополним каждый из двух равновеликих прямоугольников $HBGE$ и $FEJD$ прямоугольником $AHEF$; полученные таким способом два

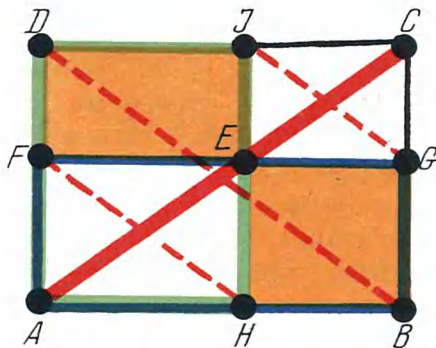


Рис. 13.

прямоугольника $ABGF$ и $AHJD$ также будут равновеликими; следовательно,

площадь $ABGF$ равна площади $AHJD$.

3) Мы предоставляем самому читателю доказать, что $FH \parallel DB \parallel JG$. Основываясь на этой теореме, выполним теперь несколько построений.

¹⁾ Теорема справедлива и для параллелограмма.

Построение первое. Преобразовать данный прямоугольник $ABGF$ (синий) в равновеликий прямоугольник (зеленый) с заданным основанием AH , лежащим на стороне AB , причем $AH < AB$ (рис. 14, а).

Рассмотрим два способа построения искомого прямоугольника.

Первый способ (рис. 14, б). Проведем прямую HH' , перпендикулярно стороне AH ; она пересечет сторону FG в точке E . Проведем прямую AE до пересечения с продолжением BG в точке C . Точка C определяет высоту BC искомого прямоугольника (зеленого) с основанием AH .

Действительно, достраивая полученную фигуру до прямоугольника $ABCD$, получаем, на основании вспомогательной теоремы, что зеленый прямоугольник $AHH'D$ с заданным основанием AH равен велик синему прямоугольнику $ABGF$.

Второй способ (рис. 14, в). Проведем прямую HH' перпендикулярно стороне AH и прямолинейный отрезок HF . Из точки G проведем прямую GG' , параллельную HF , до пересечения с прямой HH' в точке J . Точка J определяет высоту HJ искомого прямоугольника $AHJD$.

Чтобы в этом убедиться, достроим полученную фигуру до прямоугольника $ABCD$ и проведем прямолинейные отрезки AE и EC (штриховые). Образуются равные пары углов: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Но так как $\angle 1 = \angle 3$ вследствие параллельности HF и GJ , то $\angle 2 = \angle 4$; следовательно, AC — прямолинейный отрезок — диагональ прямоугольника $ABCD$. На основании вспомогательной теоремы заключаем, что прямоугольники $ABGF$ и $AHJD$ равновелики.

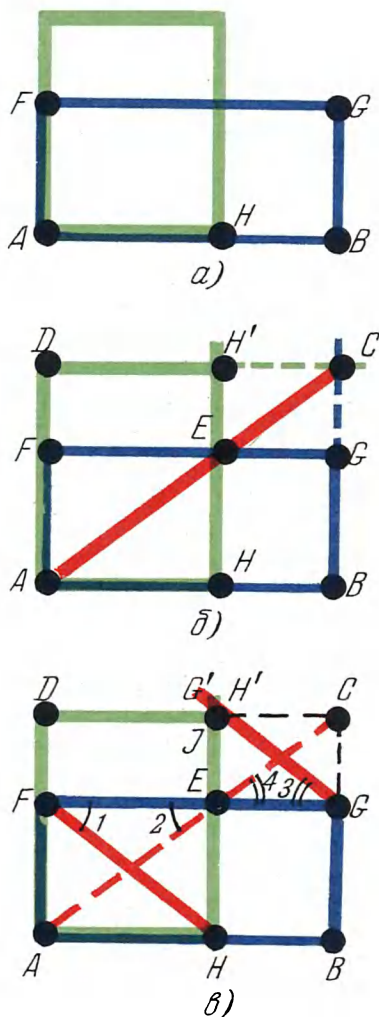


Рис. 14.

Примечания. 1) Второй способ построения короче, чем первый, но здесь приходится проводить наклонные параллельные прямые, а в первом способе — только горизонтальные или вертикальные, что при применении клетчатой или миллиметровой бумаги намного удобнее.

2) Оба способа, как легко понять, остаются в силе также и для преобразования какого-либо прямоугольника, например $FEJD$ (на рис. 13), в равновеликий ему прямоугольник с заданным основанием EG , являющимся продолжением стороны данного прямоугольника. На рис. 13 прямоугольник $FEJD$ преобразуется в прямоугольник $HBGE$.

3) Аналогично применяются оба приема построения и в случае, если основание AB искомого прямоугольника больше основания AH данного прямоугольника¹⁾. Рекомендуем самостоятельно выполнить требуемое построение для этого случая.

Построение второе. Преобразовать данную фигуру $AEFGCD$ (зеленую), составленную из двух смежных прямоугольников $ABCD$ и $BEFG$ (рис. 15, а) в равновеликий прямоугольник с основанием AE (синий).

Применим способы построения, аналогичные предыдущим.

Первый способ (рис. 15, б). Продолжим FG до пересечения со стороной AD в точке H . Построим прямоугольник $HFJD$ и проведем его диагональ HJ . Точка K пересечения HJ и BC определяет высоту BK искомого прямоугольника $AELM$ с заданным основанием AE .

В самом деле, на основании вспомогательной теоремы, желтые прямоугольники равновелики, следовательно,

прямоугольник $AELM$ равновелик первоначально данной фигуре $AEFGCD$.

¹⁾ Например, на рис. 13 зеленый прямоугольник преобразуется в синий.

Второй способ (рис. 15, в). Построим прямолинейный отрезок FD и из точки G проведем прямую $GM \parallel FD$ до пересечения с AD в точке M . AM — высота искомого прямоугольника $AELM$.

Для доказательства продолжим FG до точки H ; тогда будем иметь:

$$\frac{HG}{GF} = \frac{HM}{MD}; \text{ отсюда } HG \cdot MD = GF \cdot HM, \text{ или } MK \cdot MD = GF \cdot GK.$$

Это значит, что прямоугольники $MKCD$ и $GFLK$ равновелики и, следовательно, прямоугольник $AELM$ равновелик первоначально данной фигуре $AEFGCD$.

Построение третье (обратное предыдущему). Преобразовать прямоугольник $AELM$ (рис. 16, а) в два смежных прямоугольника, в сумме равновеликих данному прямоугольнику $AELM$, причем заданы высоты AD и EF искоемых прямоугольников, а сумма их оснований должна равняться основанию AE данного прямоугольника.

Решение. Для решения задачи можно применить любой из предыдущих способов построения. Достаточно, например, на AD отложить $AH = EF$ (рис. 16, б), а на продолжении EF отложить $EJ = AD$ и провести прямую HJ . Точка K пересечения HJ и ML определяет размеры MK и KL оснований искоемых прямоугольников $ABCD$ и $BEFG$. Равновеликость получившейся фигуры $AEFGCD$ прямоугольнику $AELM$ доказывается так же, как и в предыдущей задаче.

Упражнение. Выполнить третье построение, применяя способ, основанный на проведении наклонных параллельных прямых (см. второй способ второго построения).

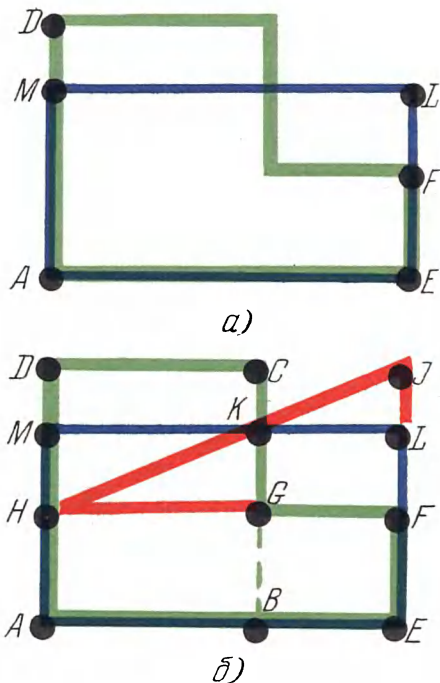


Рис. 16

ПОЕЗД

Поезд проходит расстояние от города *A* до города *B* за 10 час. 40 мин. Если бы скорость поезда была на 10 км/час меньше, то он пришел бы в *B* на 2 часа 8 мин. позже. Определить расстояние между городами и скорость поезда.

(М. в Ш., № 1, 1954 г., стр. 70)

Решение

На примере этой задачи познакомимся с двумя возможными способами применения двумерных диаграмм.

Первый способ. Чертеж делаем от руки (рис. 17).

Пусть в первом случае, предусмотренном условием задачи, продолжительность хода поезда (10 час. 40 мин.) изображается

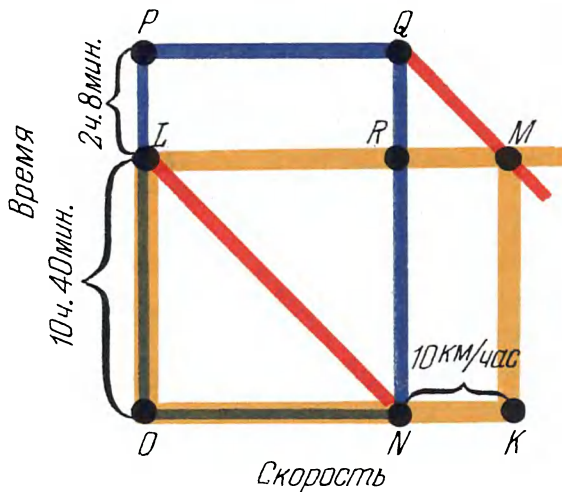


Рис. 17.

отрезком *OL*, а скорость поезда (ее величина нам пока еще неизвестна) — отрезком *OK*. Тогда площадь прямоугольника *OLMK* соответствует расстоянию между городами *A* и *B*.

Пусть во втором случае скорость поезда изображается отрезком *ON*, а соответствующее время (10 час. 40 мин. + 2 часа. 8 мин.) —

отрезком OP . В этом случае то же расстояние между городами A и B определяется площадью прямоугольника $OPQN$, равновеликого прямоугольнику $OLMK$. А если это так, то, на основании вспомогательной теоремы (см. стр. 30, п. 2 и 3) должно быть:

$$NL \parallel MQ \text{ и тогда } \triangle OLN \sim \triangle RQM.$$

Из подобия этих треугольников следует:

$$ON \text{ км/час} : 10 \text{ км/час} = 10 \text{ час. 40 мин.} : 2 \text{ час. 8 мин.},$$

или

$$ON : 10 = 640 : 128,$$

откуда

$$ON = \frac{640}{128} \cdot 10 = 50 \text{ (км/час)} \quad \text{и} \quad OK = 50 + 10 = 60 \text{ (км/час)}$$

$$10 \text{ час. 40 мин.} + 2 \text{ час. 8 мин.} = 12 \text{ час. 48 мин.}$$

Значит, расстояние между городами равно

$$50 \cdot 12 \frac{48}{60} = 640 \text{ (км)}.$$

Путь к этому простому арифметическому решению помогла найти геометрия. Алгебраическое решение задачи потребовало бы, пожалуй, даже более длительных вычислений. Наметим его. Пусть s — расстояние между городами; тогда скорость поезда в первом случае $\frac{s}{10 \frac{2}{3}}$, а во втором $\frac{s}{10 \frac{2}{3} + 2 \frac{2}{15}}$.

Составляем уравнение:

$$\frac{s}{10 \frac{2}{3}} + \frac{s}{10 \frac{2}{3} + 2 \frac{2}{15}} = 10 \text{ и т. д.}^1)$$

Приведенное решение, при котором чертеж выполнялся от руки и проводились вычисления, основанные на геометрических свойствах начерченных фигур, называется *графико-вычислительным*.

Второй способ. Ответ можно получить не только путем вычислений, но и непосредственно на диаграмме (принято говорить — снять его с диаграммы).

¹⁾ Не проще алгебраическое решение и в том случае, если в качестве неизвестной величины возьмем скорость поезда.

у которого в соответствии с выбранными масштабами вертикальный катет RQ изображает 2 час. 8 мин. (отрезок RQ равен $2\frac{8}{60} \cdot 6 = 12,8$ мм), а горизонтальный катет RM изображает 10 мм/час (длина отрезка RM — 10 мм).

— 36 —

точку N проведем прямую NL , параллельную MQ , до пересечения в точке L с продолжением MR . Тогда отрезок LR изобразит искомую скорость поезда; по масштабу определяем, что она равна 50 км/час^1).

Здесь ответ на задачу получился только при помощи построений (с выполнением чертежа в масштабе); такое решение называется *конструктивным*.

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ДОСРОЧНО

Для выполнения работ поставили 57 рабочих, которые могли окончить работу за 45 дней. Но через 15 дней добавили еще нескольких рабочих, и работа была закончена на 12 дней раньше. Сколько рабочих добавили?

(Б., № 1911)

Решение

Решим задачу графико-вычислительным способом.

Выполненная работа прямо пропорциональна числу рабочих и числу рабочих дней, отработанных каждым из них²). Следовательно, всю работу можно изобразить в виде прямоугольника $OABC$ (рис. 19) со сторонами OA (57 рабочих) и OC (45 дней). По условию, через

¹) Чем больше расстояние между двумя точками, тем точнее можно установить линейку для проведения прямой, проходящей через эти точки. Так как расстояние между точками M и Q невелико, то для повышения точности при проведении прямой NL , параллельной MQ , можно предварительно подобно увеличить треугольник QRM , например, построить подобный ему треугольник $Q'RM'$, либо $Q''RM''$ (второй треугольник удобнее: не приходится выходить за пределы чертежа; кроме того, прямая $M''Q''$ ближе к прямой NL , чем прямая $M'Q'$). Разумеется, для нахождения точек Q' и M' (или Q'' и M'') надо вычислить величины отрезков RQ' (RQ'') и RM' (RM''); например, на рис. 18

$$RQ' = RQ'' = 2,5 RQ = 2,5 \cdot 12,8 = 32 \text{ мм}, \quad RM' = RM'' = 2,5 RM = 2,5 \cdot 10 = 25 \text{ мм}.$$

²) Вообще говоря, работа, выполненная некоторым количеством рабочих за определенное число дней, равна произведению *трех* множителей: числа рабочих, числа дней и дневной (сменной) выработки одного рабочего. Но в нашей задаче один из этих трех множителей, а именно величина дневной выработки, принимается в обоих случаях постоянным; поэтому можно считать работу пропорциональной произведению *двух* множителей; это дает возможность решить задачу с помощью двумерной диаграммы.

15 дней (т. е. когда была выполнена работа, изображаемая прямоугольником $OADE$, где отрезок OE обозначает 15 дней) добавили x рабочих. Оставшаяся часть работы изображается прямоугольником $EDBC$, где EC обозначает $45 - 15 = 30$ дней.

После того как добавили x рабочих, работа была закончена на 12 дней раньше срока, т. е. через $30 - 12 = 18$ дней (EF обозначает 18 дней). Следовательно, второй период работ изобразится

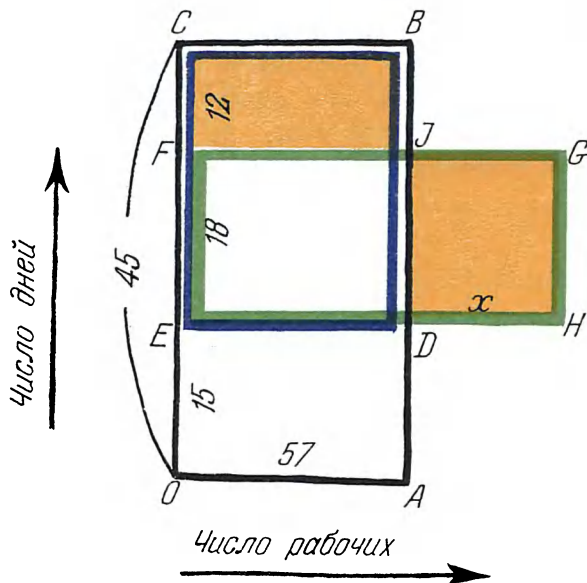


Рис. 19.

прямоугольником $EHGF$ [где EH обозначает $(57 + x)$ рабочих], равновеликим прямоугольнику $EDBC$.

Но у этих двух прямоугольников есть общая часть — прямоугольник $EDJF$; отсюда получается, что прямоугольники $FJBC$ и $DHGF$ равновелики.

Следовательно,

$$57 \cdot 12 = x \cdot 18 \quad \text{и} \quad x = \frac{57 \cdot 12}{18} = 38 \text{ (рабочих)}.$$

Упражнение. Решите эту задачу конструктивно, выполнив точный чертеж в некотором масштабе.

ТЕПЛАЯ И ХОЛОДНАЯ ВОДА

К 3 л воды при температуре 36° добавили 4 л воды комнатной температуры (15°). Какая температура воды установится в сосуде?

(Б., № 380)

Решение

Разумеется, эта задача легко решается арифметическим путем. Но всё же рассмотрим ее геометрическое решение для того, чтобы, ознакомившись с различными приемами использования двумерных диаграмм, применять их затем к решению более сложных задач.

Как известно, количество тепла, необходимое для нагревания тела, прямо пропорционально массе тела и приращению его температуры. Удельный вес воды равен 1, так что масса воды (в кг)

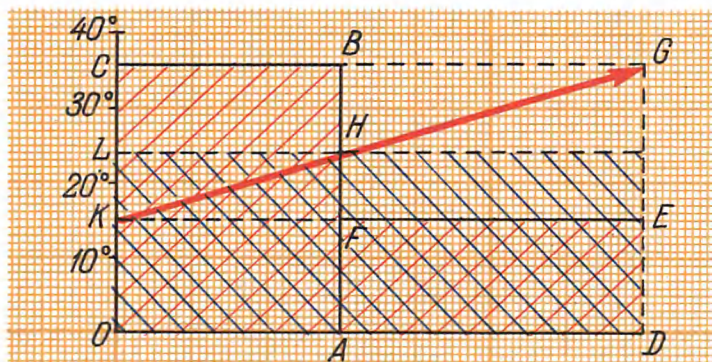


Рис. 20а.

численно равна ее объему (в л). Поэтому, если основание некоторого прямоугольника будет изображать объем воды в литрах, а высота — приращение температуры в градусах, то площадь этого прямоугольника покажет количество больших калорий, необходимое для нагревания данной массы воды.

Построим два смежных прямоугольника $OABC$ и $ADEF$ (рис. 20а), соответствующие количеству тепла, затраченному для нагревания 3 л воды от 0 до 36° и 4 л воды — от 0 до 15° . Объем смеси — 7 л — изобразится отрезком OD . Площадь фигуры $OCBFED$

показывает количество тепла, полученное смесью при повышении ее температуры от 0° до неизвестной пока величины t° . Искомую температуру смеси t° будет изображать высота такого прямоугольника, основание которого — OD , а площадь равна сумме площадей прямоугольников $OABC$ и $ADEF$.

Эту высоту легко получить построением, тем способом, который изложен на стр. 32 (второе построение). Продолжим стороны DE и CB до пересечения в точке G и сторону EF — до точки K . Отрезок KG пересекает сторону AB в точке H . Отрезок AH или равный

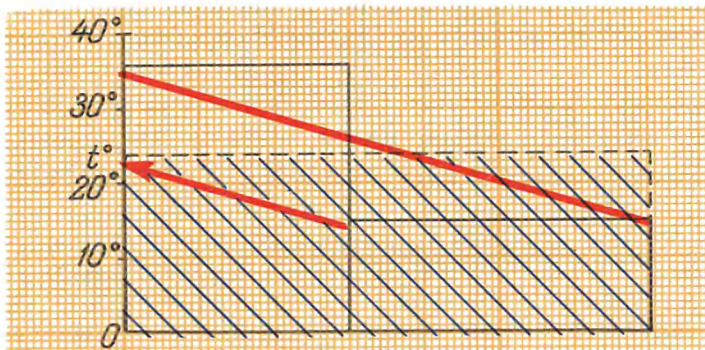


Рис. 206.

ему отрезок OL — искомая высота. Пользуясь масштабом оси OC , читаем ответ: температура смеси равна 24° .

При желании искомую высоту OL можно получить и другим способом, изложенным на стр. 33 (второе построение, второй способ). Это построение выполнено на рис. 206.

НАБОРЩИКИ

Один наборщик проработал над выполнением заказа 9 час., после чего закончить работу было поручено другому наборщику, который окончил работу за 4 часа 48 мин. Если бы оба наборщика работали вместе, они окончили бы набор за 6 час. 40 мин.

За сколько времени смог бы выполнить работу каждый наборщик отдельно?

(М. в Ш., № 2, 1954 г., стр. 42)

Решение

Работа, выполненная наборщиком, равна произведению его часовой выработки на число проработанных им часов и, следовательно, может быть представлена площадью прямоугольника.

Проведем (рис. 21а) горизонтальный отрезок AB произвольной длины; пусть он изображает часовую выработку обоих наборщиков

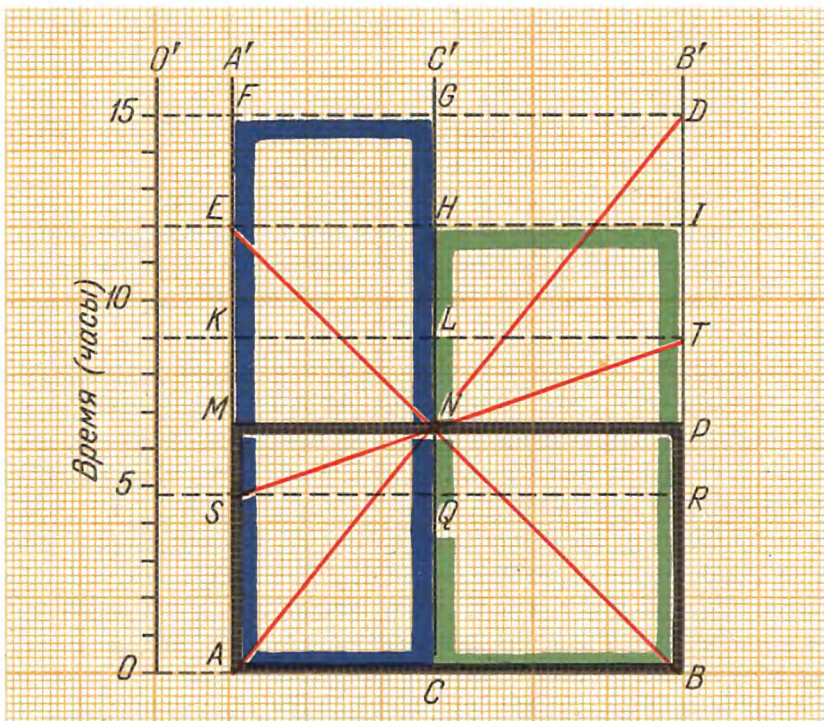


Рис. 21а

вместе. Перпендикулярно к нему проведем два луча: AA' и BB' . Выберем масштаб для изображения времени (например, 1 час = 5 мм) и пометим время на каждом из этих лучей (или на одном из них), начиная от нуля. (На рис. 21а для ясности масштаб изображен на отдельной прямой OO' .) На прямой AA' отметим точку M , указывающую 6 час. 40 мин., и проведем $MP \parallel AB$. Площадь прямоугольника $AMPB$ представляет количество всей работы.

Но эта работа выполнялась наборщиками поочередно; поэтому теперь следует построить два прямоугольника, изображающих соответственно работу каждого наборщика отдельно. Оба прямоугольника вместе должны быть равновелики прямоугольнику **AMPB**.

Известны высоты этих прямоугольников: одна соответствует промежутку времени в 9 час. (отрезок **AK** = 45 мм), другая — промежутку времени в 4 час. 48 мин. (отрезок **BR** = 24 мм).

Сумма оснований искоемых прямоугольников должна составлять отрезок **AB**, так как часовая выработка при совместной работе двух наборщиков равна сумме часовых выработок каждого из них.

Задача сводится к разбиению отрезка **AB** на такие две части **AC** и **CB**, чтобы сумма площадей двух прямоугольников **ACLK** и **CBRQ** была равна площади прямоугольника **ABPM**.

Способ построения точки **C** обоснован на стр. 33 (построение третье). На прямой **BB'** отметим точку **T**, изображающую 9 час. (**BT** = **AK**), а на прямой **AA'** — точку **S**, изображающую 4 час. 48 мин. (**AS** = **BR**). Проведем отрезок **ST**. Точка **N** пересечения отрезков **ST** и **MP** определяет размеры **MN** и **NP** оснований искоемых прямоугольников. Найденные прямоугольники **ACLK** и **CBRQ** вместе равновелики прямоугольнику **ABPM**. Их основания **AC** и **CB** изображают соответственно часовую выработку первого и второго наборщиков.

Теперь, чтобы ответить на вопрос задачи — за сколько времени смог бы выполнить работу каждый наборщик отдельно, надо заменить прямоугольник **ABPM** равновеликим ему прямоугольником с основанием **AC** (для первого наборщика) или с основанием **CB** (для второго наборщика). Для этого достаточно провести прямую **AN** до пересечения в точке **D** с прямой **BB'** и прямую **BN** до пересечения в точке **E** с прямой **AA'**. Теперь легко построить прямоугольники **AFGC** и **CHJB**, в которых **AF** = **BD** и **BJ** = **AE**. Из построения следует, что каждый из них равновелик прямоугольнику **AMPB** (см. построение первое на стр. 31). Отрезки **AF** и **BJ** указывают ответ на вопрос задачи. По масштабу определяем, что отрезки **AF** и **BJ** изображают соответственно 15 час. и 12 час.

Итак, первый наборщик мог бы выполнить всю работу за 15 час., а второй — за 12 час.

Заметьте, что, в сущности, построение прямоугольников, равновеликих прямоугольнику **ABPM**, не требуется для решения задачи. Оно было нужно только для доказательства правильности решения.

Фактически, после того как была получена точка N , для решения задачи требовалось лишь провести через эту точку прямые AD и BE (рис. 216).

Если чертеж выполнялся от руки, не на миллиметровой бумаге и без масштаба, то для получения ответа потребовались бы

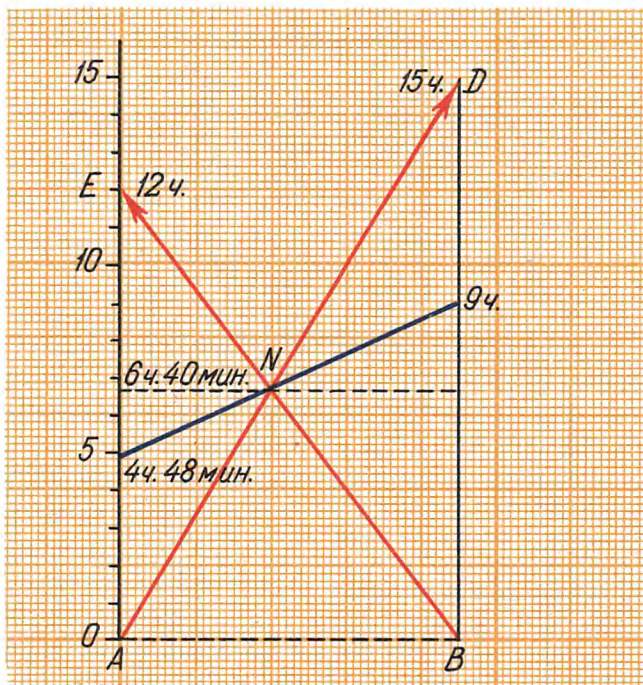


Рис. 216.

вычисления, использующие подобие трех пар треугольников:

SMN и TPN , ADB и ANC , BEA и BNC ,

откуда

$$MN:NP = MS:PT,$$

но

$$MS = AM - AS = 6 \text{ час. } 40 \text{ мин.} - 4 \text{ час. } 48 \text{ мин.} = 112 \text{ мин.},$$

$$PT = BT - BP = 9 \text{ час.} - 6 \text{ час. } 40 \text{ мин.} = 140 \text{ мин.};$$

следовательно,

$$MN:NP = 112:140 = 4:5.$$

Далее,

$$BD:CN = AB:AC = MP:MN = (4 + 5):4 = 9:4;$$

отсюда

$$BD = \frac{9}{4} \cdot CN = \frac{9}{4} \cdot 6 \text{ час. } 40 \text{ мин.} = 15 \text{ час.}$$

Аналогично, $AE = 12 \text{ час.}$

ТРИ СПЛАВА

Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

(А. В. Н. С., № 485)

Решение

Будем решать задачу по долям какого-либо одного металла в сплаве, например по долям серебра. Серебро составляет $\frac{3}{5}$ первого сплава, $\frac{7}{10}$ второго и $\frac{11}{16}$ искомого. Общий знаменатель

этих дробей — 80. Следовательно, на каждые 80 частей в первом сплаве приходится 48 частей серебра, во втором — 56, в искомом — 55 частей.

Построим диаграмму задачи и выполним построение вначале без обоснования (рис. 22). В горизонтальном направлении будем откладывать вес сплава (в кг), а в вертикальном — число долей серебра в сплаве.

Проведем горизонтальный отрезок AB , изображающий 8 кг (вес искомого сплава) в масштабе: 1 кг = 5 мм. Для вертикального луча AC принимаем масштаб: 1 доля серебра = 5 мм. Для уменьшения размера чертежа (по вертикали) наносим на луче AC деления, начиная не с нуля, а с 48 (48 — наименьшее количество долей серебра в сплавах). Соединяем прямолинейным отрезком точки B (8 кг) и C (56 долей

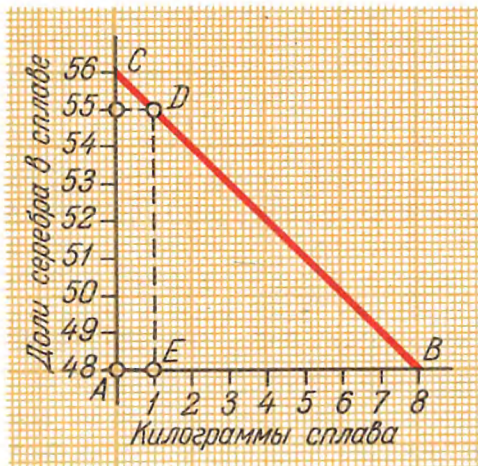


Рис. 22.

ча AC принимаем масштаб: 1 доля серебра = 5 мм. Для уменьшения размера чертежа (по вертикали) наносим на луче AC деления, начиная не с нуля, а с 48 (48 — наименьшее количество долей серебра в сплавах). Соединяем прямолинейным отрезком точки B (8 кг) и C (56 долей

серебра) и проводим через точку с отметкой 55 горизонтальную прямую до пересечения с BC в точке D , а через D — вертикальную прямую до пересечения с AB в точке E .

Решение готово. Отрезки AE и EB указывают ответ: надо взять 1 кг первого сплава (отрезок AE) и 7 кг второго сплава (отрезок EB).

Пользуясь построенным треугольником ABC , легко на этом же чертеже установить: сколько кг каждого сплава нужно взять, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором на каждые 80 частей приходилось бы m частей серебра (m — любое число между 48 и 56). Построение совершенно аналогичное. Решите эту задачу, например, для $m = 50$.

Перейдем теперь к обоснованию только что описанной схемы решения (рис. 23). Пусть отрезки b_1 и b_2 изображают количества первого и второго сплавов, взятые для составления нового сплава. Тогда отрезок $b_3 = b_1 + b_2$ изображает количество нового сплава. Из левого конца отрезка b_1 восставлен перпендикуляр a_1 , а из правого конца отрезка b_2 — перпендикуляр a_2 : длины этих перпендикуляров соответствуют долям серебра в каждой одинаковой по весу порции первого и второго сплавов.

Прямоугольники со сторонами a_1 , b_1 (желтый) и a_2 , b_2 (синий) представляют соответственно количество серебра в первом и втором сплавах. Построим еще отрезок a_3 , изображающий долю серебра в новом сплаве; тогда прямоугольник со сторонами a_3 , b_3 (зеленый) представляет количество серебра в новом сплаве, составленном из первых двух. При этом очевидно, что сумма площадей первых двух прямоугольников должна равняться площади прямоугольника со сторонами a_3 и b_3 .

Геометрический смысл решения задачи и состоит в построении таких двух прямоугольников (с известными высотами a_1 и a_2

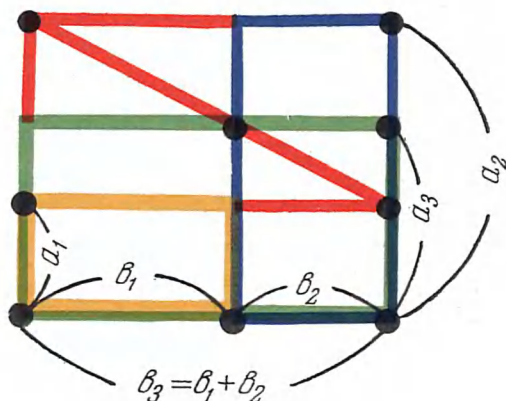


Рис. 23.

и неизвестными основаниями b_1 и b_2), которые в сумме равновелики прямоугольнику с данной высотой a_3 и данным основанием b_3 , причем $b_1 + b_2 = b_3$.

Это достигается при помощи несложных построений, рассмотренных на стр. 33 (построение третье). Так могут быть найдены искомые части b_1 и b_2 данного отрезка b_3 , а вместе с тем, следовательно, и искомые количества сплавов для получения нового сплава с указанным относительным содержанием серебра (a_3).

Что касается диаграммы на рис. 22, примененной для непосредственного решения задачи, то она является упрощенным воспроизведением только что выполненного построения, освобожденным от деталей, которые нужны не для самого решения, а лишь для его обоснования. Наглядно-геометрическое решение задачи можно осуществить и без точных построений, без применения масштабов; можно выполнить чертеж «от руки», а для вычислений использовать подобие треугольников.

У п р а ж н е н и е. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 1:2, в другом — в отношении 2:3. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 44 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 17:27?

(А. В. Н. С., № 487)

БЫКИ НА ЛУГУ

На одном лугу площадью $3\frac{1}{3}$ акра паслось 12 быков; за 4 недели они съели всю траву, которая первоначально была на лугу, а также и ту, которая вырастала в течение этих 4 недель. На другом лугу площадью 10 акров пасся 21 бык; эти быки за 9 недель съели траву, имевшуюся первоначально, а также ту, которая вырастала за эти дни.

Сколько быков нужно пустить на луг площадью 24 акра, чтобы они при тех же условиях могли прокормиться 18 недель?

(Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона,
по английскому изданию 1728 г.)

Уточним условие задачи. Предполагается, очевидно, что:

1) возраст травы, выросшей на лугу к моменту выгона быков, один и тот же для всех лугов;

2) за каждую неделю на каждом акре любого луга вырастает одно и то же количество травы:

3) еженедельная порция травы для каждого быка также одинакова.

Решение

При подсчете количества травы, съедаемой быками на каждом лугу, надо принимать во внимание три величины: площадь луга, число быков, пасущихся на этом лугу, и продолжительность пребывания быков на лугу. По условию задачи каждая из этих величин имеет различные значения для каждого луга:

Луг	Площадь	Число быков	Число недель
1	$3\frac{1}{3}$	12	4
2	10	21	9
3	24	x	18

Чтобы иметь возможность применить к решению задачи двумерные диаграммы, надо устранить влияние одной из этих величин, например площади луга, сделав ее одинаковой для всех трех лугов; тогда количество травы, съедаемой быками, будет зависеть от произведения только двух множителей, имеющих определенные значения для каждого луга.

Приведем все данные площади лугов, скажем, к площади второго луга (10 акров). Если бы первый луг имел не $3\frac{1}{3}$ акра, а 10 акров, т. е. втрое большую площадь, то потребовалось бы не 12 быков, чтобы съесть за 4 недели всю имевшуюся и выросшую траву на этом лугу, а в 3 раза больше, т. е. $12 \times 3 = 36$ быков. Аналогично, если бы третий луг был площадью не 24 акра, а 10 акров, то, чтобы съесть всю траву за 18 недель, потребовалось бы не x быков, а $\frac{10}{24}x = \frac{x}{2,4}$ быков.

Для лугов с одинаковой площадью, таким образом, условие задачи упрощается.

Оно будет таким:

Было три луга — все три одинаковой площади (какой именно — безразлично); на первом лугу паслось 36 быков и за 4 недели они съели всю траву, которая первоначально была на лугу, а также и ту, которая вырастала в течение этих 4 недель. На втором лугу пасся 21 бык: эти быки за 9 недель съели всю траву, имевшуюся на лугу, а также ту, которая вырастала за это время. Сколько быков (u) нужно пустить на третий луг, чтобы при тех же условиях они могли прокормиться 18 недель?

Схема упрощенного условия

Площадь	Число быков	Число недель
10	36	4
10	21	9
10	u	18

Здесь u связано с искомым числом x соотношением $u = \frac{x}{2,4}$, откуда $x = 2,4u$.

Решение задачи с этим новым условием начнем с наброска от руки диаграммы для количества травы, выросшей на первых двух лугах (верхний набросок на рис. 24).

На первом лугу трава росла 4 недели (BE) и еще несколько недель до выгона быков на первый луг. Это число недель пока неизвестно, поэтому изобразим его произвольным отрезком BL . На втором лугу трава росла 9 недель (AB) и еще (BL) недель до выгона быков на этот луг (см. предположение 1).

Так как каждую неделю на каждом акре луга вырастает одно и то же количество травы (см. предположение 2), то количество травы, выросшей на первом лугу, можно изобразить условно прямоугольником $ELKH$ с основанием $EL = EB + BL$, а количество травы, выросшей на втором лугу, — прямоугольником $ALKJ$ с основанием $AL = AB + BL$. Высота LK обоих прямоугольников одна и та же (она численно равна площади луга — 10 акрам). Как видим, запас травы для корма быков на втором лугу больше, чем на первом; этот избыток изображается условно прямоугольником $AENJ$.

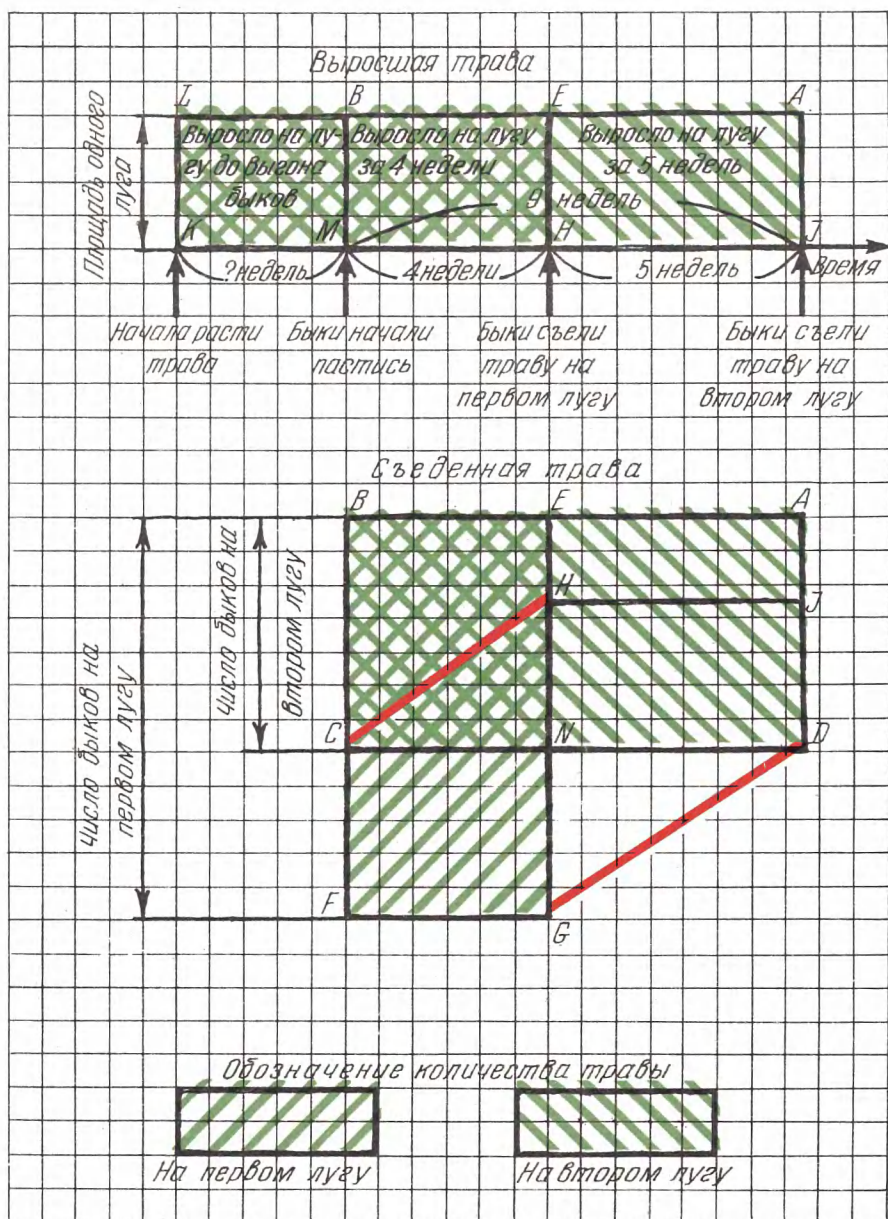


Рис. 24.

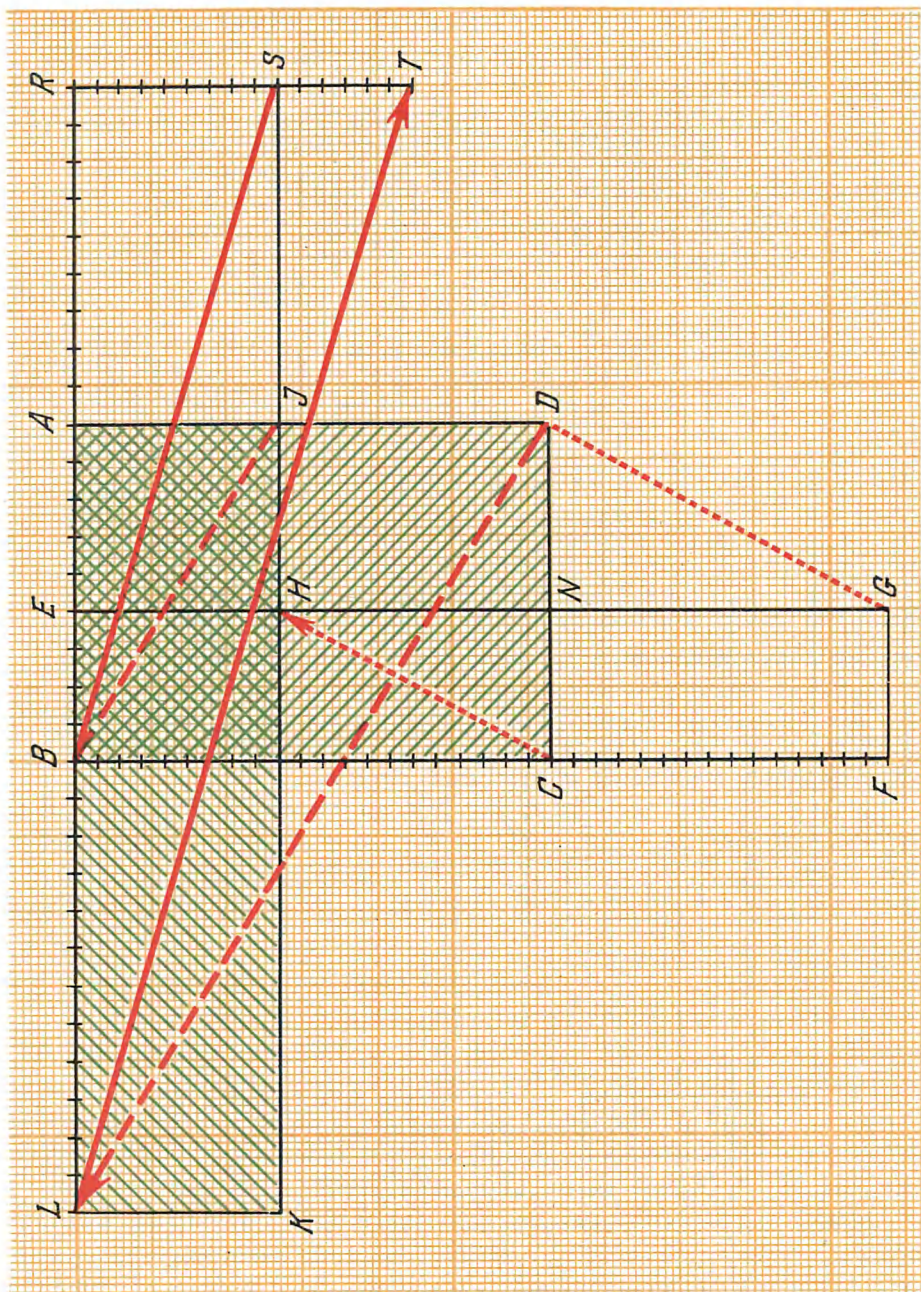


Рис. 25.

Теперь сделаем набросок второй диаграммы для количества травы, съеденной быками на тех же двух лугах (нижний набросок на рис. 24). В качестве оснований прямоугольников возьмем те же отрезки BE и BA , что и на предыдущей диаграмме.

Пусть отрезки BF и BC изображают число быков, пасшихся соответственно на первом и втором лугах. Тогда прямоугольники $EBFG$ и $ABCD$ изображают условно количество травы, съеденной быками соответственно на первом и на втором лугах (см. предположение. 3)

По условию, на каждом лугу быки съели всю выросшую траву. Значит, должны быть равновеликими прямоугольники $ELKH$ (на первой диаграмме) и $EBFG$ (на второй диаграмме), а также $ALKJ$ и $ABCD$. Следовательно, и разность площадей прямоугольников на первой диаграмме должна быть равна разности площадей прямоугольников на второй диаграмме.

Найдем разность площадей этих прямоугольников на второй диаграмме. Для этого построим отрезок GD (красный) и проведем $CH \parallel GD$ и $HJ \parallel ND$. Получились равновеликие прямоугольники: $NCFG$ и $JHND$ (см. стр. 31). Легко понять, что разность площадей прямоугольников $ABCD$ и $EBFG$ равна площади прямоугольника $AENJ$. Но, как установлено, площадь $AENJ$ на второй диаграмме равна площади $AENJ$ на первой, а так как основания (AE) этих прямоугольников одинаковы по построению, то должны быть равны и высоты (AJ)¹⁾.

Теперь обе диаграммы можно выполнить на одном чертеже (рис. 25), изображая отрезки точно в соответствии с условием задачи (упрощенным), и при помощи дополнительных построений получить ответ как на вопрос задачи, так и на вопрос — сколько выросло травы к моменту выгона быков на пастбища (отрезок LB).

Построим последовательно: отрезки BE и BA , соответственно равные 4 и 9; отрезки BF и BC , соответственно равные 36 и 21 (в другом масштабе для большей наглядности); прямоугольники $EBFG$ и $ABCD$; отрезок GD ; отрезок CH , параллельный GD ; прямую HJ , параллельную CD ; отрезок JB ; отрезок DL , параллельный JB ; и наконец, прямоугольник $LAKJ$.

¹⁾ Это равенство позволяет установить одну любопытную деталь, относящуюся к процессу прироста травы в условиях задачи. На первой диаграмме отрезок AJ изображает 10 акров; на второй диаграмме равный ему отрезок AJ изображает, как нетрудно подсчитать, 9 быков. Следовательно, суточный прирост травы на каждых 10 акрах луга равен порции травы, съедаемой в сутки девятью быками.

Прямоугольник $LAKJ$ будет равновелик прямоугольнику $BADC$, а прямоугольник $LEHK$ — прямоугольнику $BEGF$ (см. построение первое, второй способ, стр. 31). При этом отрезок BL будет показывать возраст травы, выросшей на каждом лугу до выгона быков. По масштабу определяем, что отрезок BL изображает 12 недель.

Теперь построим отрезок BR , изображающий продолжительность пребывания (18 недель) неизвестного пока числа быков на третьем лугу в 10 акров. Количество травы, выросшей на этом лугу, изображается прямоугольником $LRSK$. По условию, всю траву на третьем лугу должны съесть $u = \frac{x}{2,4}$ быков за 18 недель. Это число u определится высотой RT такого прямоугольника, основание которого BR , и который равновелик прямоугольнику $LRSK$. Чтобы найти отрезок RT , достаточно провести отрезок BS и прямую $LT \parallel BS$ до пересечения в точке T с продолжением отрезка RS (см. стр. 31). По масштабу определяем: отрезку RT соответствует число 15. Следовательно, $u = 15$.

Итак, вся трава, выросшая на третьем лугу площадью 10 акров, будет съедена за 18 недель 15 быками; это и есть ответ на задачу с упрощенным условием.

А на первоначальную задачу ответ таков: на лугу площадью 24 акра могут прокормиться в течение 18 недель

$$x = 2,4 \cdot 15 = 36 \text{ быков.}$$

СНОВА ПОЕЗД

Известно, что если скорость поезда возрастет на v_1 км/час, то он придет на t_1 час. раньше срока. Если же скорость уменьшится на v_2 км/час, то он придет на t_2 час. позже срока. Найти скорость v и продолжительность хода t по расписанию.

Решение

На горизонтальной прямой от произвольной точки T (рис. 26) отложим (в масштабе времени) два отрезка: влево отрезок $TT_1 = t_1$, а вправо отрезок $TT_2 = t_2$. От точки T_1 вниз по вертикали отло-



Глава третья

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

В этой и следующих главах рассматривается применение графических приемов к решению задач, связанных с различными *равномерными процессами*, широко распространенными в природе и в технике. Например, равномерно накапливается вода в цилиндре, поставленном под водопроводный кран, если струя создается неизменным напором; это значит, что за равные промежутки времени, считая от любого начального момента, в цилиндр поступают равные объемы воды (рис. 27).

Равномерность действия, процесса, может рассматриваться не только по отношению ко времени. Так, например, в пружинных весах пружина изменяет свою длину под действием изменяющейся нагрузки равномерно; это значит, что равным изменениям нагрузки (веса), считая от любого начального веса, соответствуют равные изменения длины пружины (рис. 28).

Если одна величина изменяется равномерно по отношению к другой, то такое соответствие между этими величинами называется *линейной функцией*. Основное свойство линейной функции: *равным изменениям одной величины (считая от любого ее начального значения) соответствуют равные изменения другой величины*. Никакая другая функция (т. е. связь между двумя величинами), кроме линейной, указанным свойством не обладает.

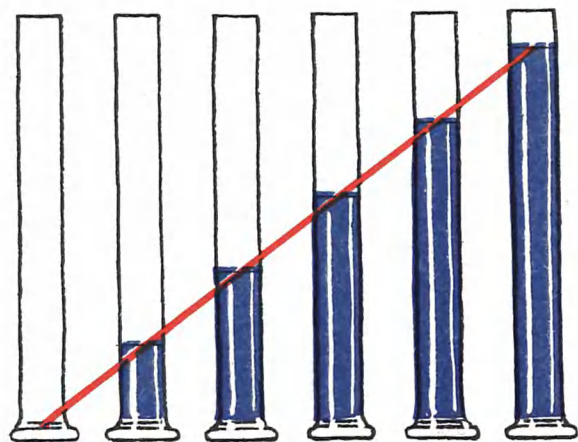


Рис. 27.

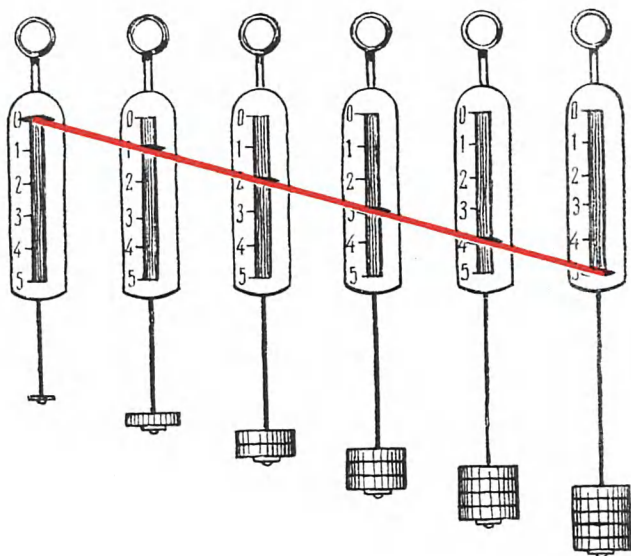


Рис. 28.

Графиком линейной функции служит прямая линия, не параллельная оси ординат ¹⁾).

Действительно, возьмем в прямоугольной системе координат (рис. 29) произвольную прямую, не параллельную оси OY , и отложим на оси OX два произвольных, но равных отрезка $AB = CD$; из концов этих отрезков восставим перпендикуляры к оси OX до пересечения с данной прямой, и точки пересечения спроектируем

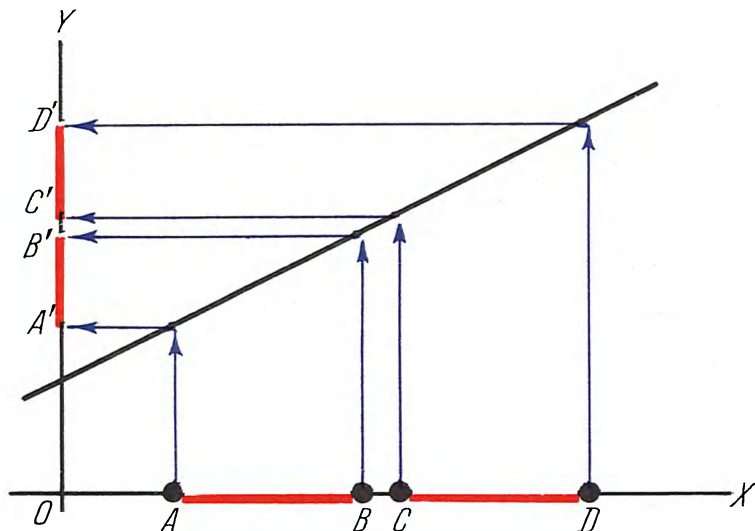


Рис. 29.

на ось OY ; тогда соответствующие отрезки $A'B'$ и $C'D'$ непременно окажутся равными: $A'B' = C'D'$. (Докажите это.)

Можно как угодно передвигать равные отрезки AB и CD по оси OX , но равенство соответствующих отрезков $A'B'$ и $C'D'$ сохранится. Отрезки $AB = OB - OA$ и $CD = OD - OC$ изображают изменения аргумента, а отрезки $A'B' = OB' - OA'$ и $C'D' = OD' - OC'$ — соответствующие изменения линейной функции.

Невозможно нарисовать кривую или ломаную с таким же свойством.

Так как основное свойство, характеризующее линейную функцию, выполняется только в случае прямой линии, то,

¹⁾ О графике функции см. в предисловии.

следовательно, только прямая линия и является графиком всякой линейной функции.

Если известно, что рассматриваемая зависимость между двумя величинами — линейная, то ее график — прямую — легко построить, например, по точке и заданному направлению, или по двум точкам.

Пусть, например, известно, что в момент $t_0 = 0$ час. длина l зажженной свечи была $l_0 = 20$ см, а в момент $t_1 = 1$ час. длина

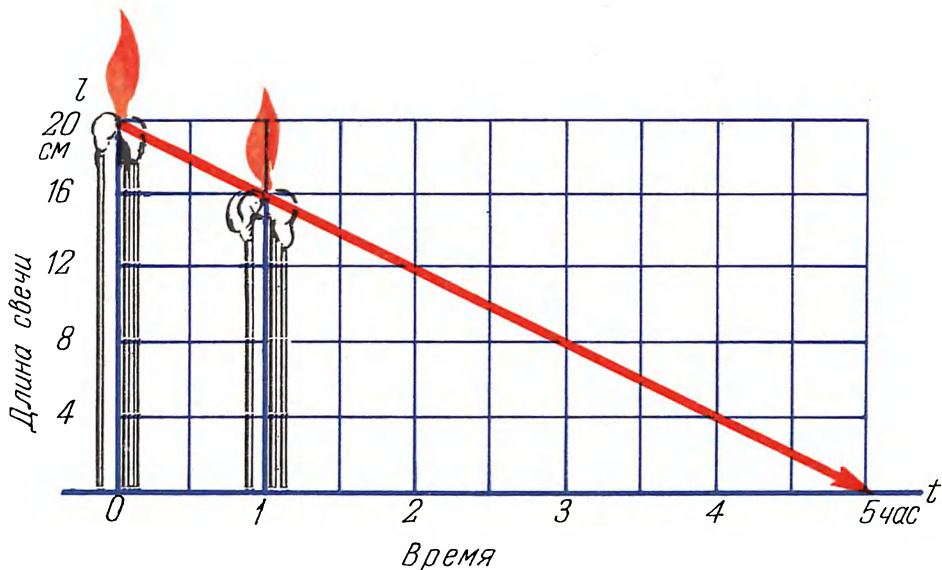


Рис. 30.

$l_1 = 16$ см (рис. 30). Практически можно считать, что сгорание свечи — процесс равномерный; поэтому для построения графика наносим на координатную сетку точки $(0; 20)$ и $(1; 16)$ и соединяем их прямой линией. По графику теперь легко определить, хватит ли этой свечи до рассвета, за какой промежуток времени она сгорит полностью, какой длины останется огарок, если погасить свечу в 3 часа, и т. д.

Для графического решения задач иногда удобно считать линейной функцией и такую зависимость, графиком которой является не сплошная прямая линия, а совокупность отдельных

точек, но расположенных на одной прямой линии (в этом случае аргумент, принимая отдельные числовые значения x_1, x_2 , не может, по смыслу задачи, принимать все значения, расположенные между ними). Таков, например, *график стоимости телеграммы* (рис. 31): за передачу каждого слова текста и адреса

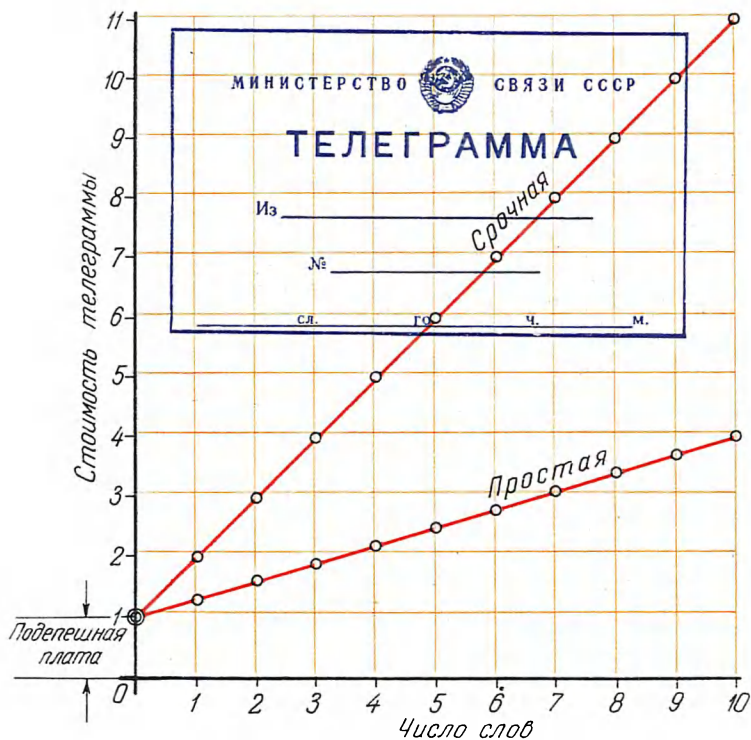


Рис. 31.

простой телеграммы взыскивается 30 коп. и, кроме того, подпешная плата — 1 руб. Аргумент может принимать только целые значения: 4, 5, 6,... Точки, образующие график, изолированы (т. е. расположены отдельно), но находятся на одной прямой линии.

Прямая пропорциональность есть частный вид линейной функции. График прямой пропорциональности — прямая, проходящая через начало координат.

Упражнение. В таблице приведены нормы расхода бензина на 100 км пробега для пяти марок автомашин:

«Москвич»	8 л,
«Победа»	16 л,
Газ-АА 1,5 т	21 л,
Зил-5 3 т	34 л,
Зил-150 4 т	38 л.

Постройте на одном чертеже графики расхода бензина в зависимости от пройденного расстояния для этих пяти марок автомобилей. Определите по графику, какое расстояние пройдет Газ-АА на таком количестве бензина, которое ЗИЛ-5 израсходует на 63 км?

РАСЧЕТ ТОКАРЯ

Токарю принесли чертеж детали.

— Сколько времени потребуется, чтобы ее выточить?

— На одну штуку — один час.

— Но мне нужна не одна штука.

— Если несколько, то я затратчу на изготовление каждой штуки меньше часа.

— Почему так?

— Очень просто: если нужно изготовить всего две-три штуки, то я буду работать без всяких приспособлений и на каждую деталь у меня уйдет по часу. Но если я предварительно сделаю несложное приспособление, на изготовление которого затратчу 2 часа, то на каждую штуку буду тратить уже не по часу, а по полчаса.

— Тогда на 20 штук потребуется 12 час.?

— Нет, если нужно изготовить 20 штук, то я сделаю другое приспособление; оно сложнее первого и на его изготовление уйдет 5 час., но зато с его помощью я буду вытачивать каждую деталь всего за четверть часа.

Изобразите графически зависимость между количеством изготавливаемых деталей и количеством времени, затрачиваемым на их изготовление:

а) без приспособлений,

б) с применением первого приспособления,

в) с применением второго приспособления.

В двух последних случаях следует учитывать и то количество времени, которое требовалось на изготовление приспособления.

По чертежу ответьте, для какого из трех перечисленных способов изготовления деталей при заданном их количестве (от одного до двадцати) общее затраченное время будет наименьшим.

Проследите за изменением средней продолжительности изготовления одной детали при изменении как числа деталей, так и способа их изготовления. Это среднее время равно отношению количества времени, затрачиваемого на изготовление n деталей и приспособления (если оно применялось), к числу n изготовленных деталей.

Решение

Построим графики на одном чертеже (рис. 32, а) и будем «читать» на нем ответы на поставленные вопросы.

Если требуется изготовить меньше четырех деталей, то работа без приспособлений потребует меньшего количества времени.

Если требуется изготовить 4 детали, то безразлично, применит токарь приспособление или выполнит эту работу без приспособления: впрочем, в этом случае нет смысла тратить материал на изготовление приспособления.

Для изготовления деталей в количестве от 4 до 12 штук выгоднее пользоваться первым приспособлением.

Для изготовления двенадцати деталей безразлично, какое приспособление применит токарь: первое или второе.

Второе приспособление экономит время при изготовлении тринадцати и более деталей.

Теперь найдем среднюю продолжительность изготовления одной детали.

При изготовлении деталей без приспособления средняя продолжительность изготовления одной штуки всегда равна 1 часу. Точки, изображающие «среднее время» (рис. 32, б) в этом случае располагаются вдоль горизонтальной прямой (синяя горизонтальная линия). «Среднее время» в случае применения первого приспособления изображается точками, расположенными на гиперболе (желтая линия). Аналогично, при применении второго приспособления «среднее время» изображается точками, расположенными на другой гиперболе (красная линия). В каждом из двух последних случаев «среднее время» снижается при увеличении числа изготовленных деталей.

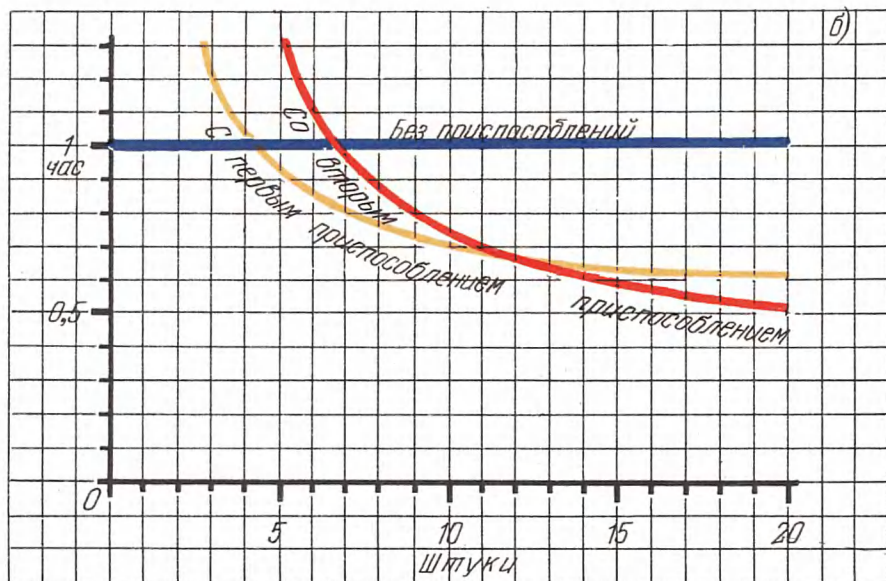
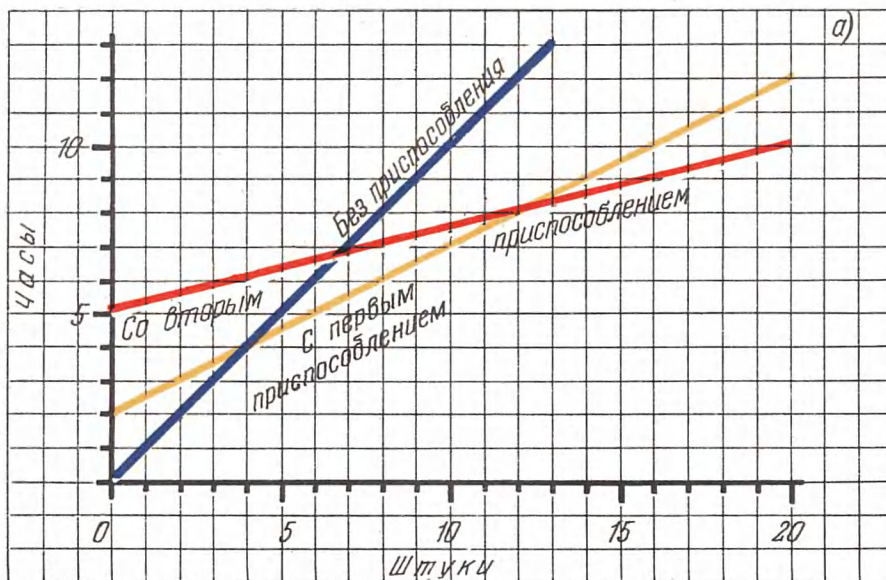


Рис. 32.

ДРОВА

На складе было 135 м^3 березовых и 114 м^3 сосновых дров. Ежедневно со склада вывозили по $7\frac{1}{2} \text{ м}^3$ березовых и по $6\frac{1}{2} \text{ м}^3$ сосновых дров.

Через сколько дней на складе останется поровну тех и других дров?

Решение

Арифметически задачу часто решают так:

1) На сколько было больше березовых дров, чем сосновых?

$$135 - 114 = 21 \text{ м}^3.$$

2) На сколько ежедневно вывозили больше березовых дров, чем сосновых?

$$7\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2} = 1 \text{ м}^3.$$

3) Через сколько дней на складе останется поровну тех и других дров?

$$21:1 = 21 \text{ (день)}.$$

Ход рассуждений как будто правильный, но... полученный «ответ» нелепый: он не соответствует действительности. В самом деле: если ежедневно вывозить со склада по $6,5 \text{ м}^3$ сосновых дров, то за 21 день должно быть вывезено $6,5 \cdot 21 = 136,5 \text{ м}^3$, а на складе их было всего лишь 114 м^3 !

Без этой дополнительной проверки можно было бы и не заметить, что получившийся результат: «21 день» лишен смысла.

При графическом оформлении решения задачи несоответствия подобного рода между ответом и действительностью становятся наглядными и, следовательно, заметными еще в процессе решения или даже в самом начале решения.

В этом отношении графики весьма предусмотрительны!

Так как каждый день вывозят дрова со склада одинаковыми порциями, то для графического решения задачи можно и здесь воспользоваться аналогией с равномерным процессом и изображать количество дров каждого сорта на складе точками, лежащими

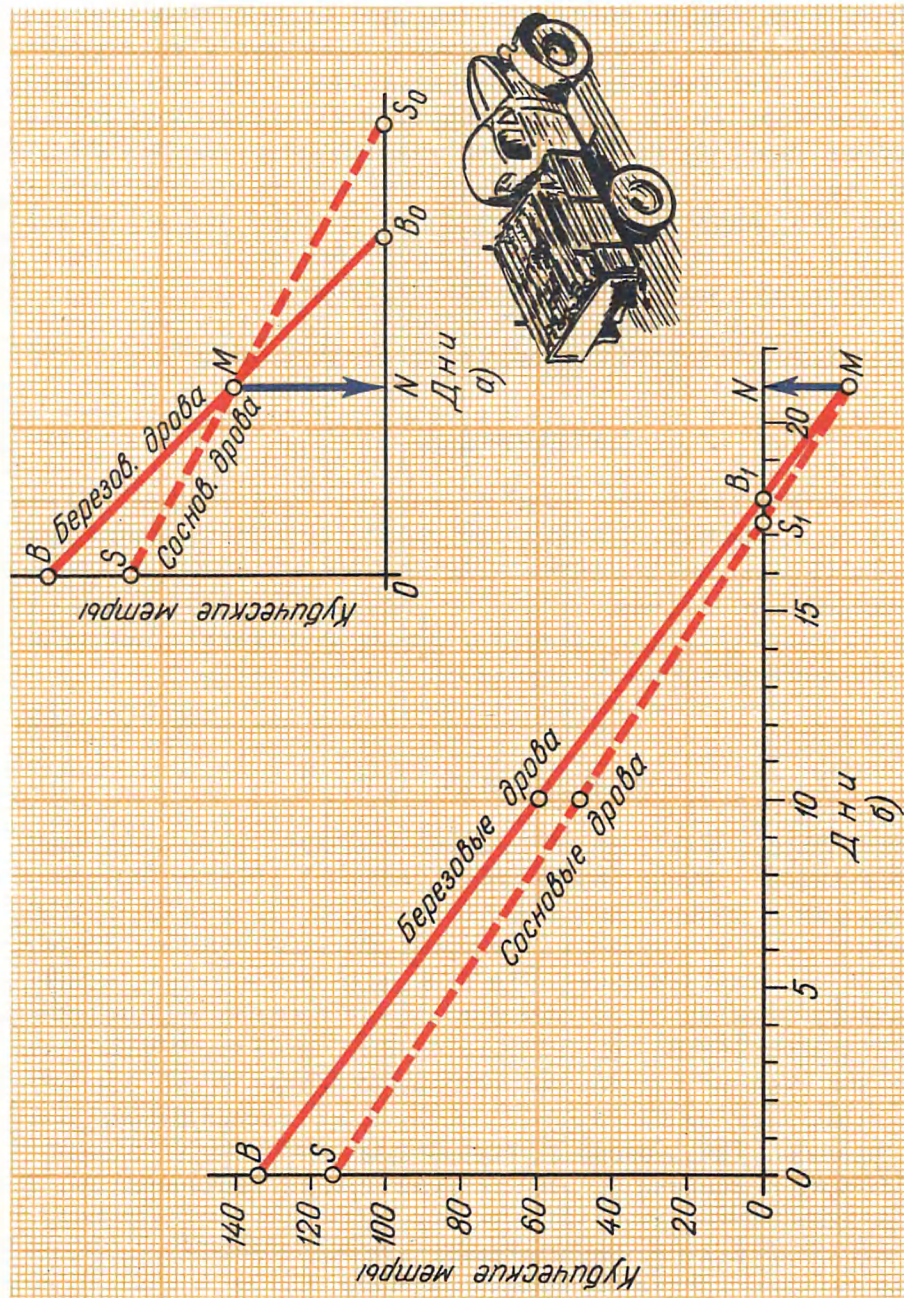


Рис. 33.

на прямой линии. Построим эти две прямые (сравните рис. 33 *а*, с рис. 30). Пересечение этих двух прямых даст точку M ; ее проекция N на ось OX укажет, через сколько дней на складе могло бы остаться поровну тех и других дров. Но точное построение графиков на рис. 33, *б* показывает, что обе прямые SM и BM пересекают ось OX в точках S_1 и B_1 , расположенных левее точки N ; это значит, что первоначальный запас дров был мал и что их полностью вывезут со склада раньше, чем наступит тот день, когда их на складе могло бы остаться поровну.

Итак, в условиях задачи, на складе не может остаться поровну березовых и сосновых дров. Таков правильный ответ.

ОЛИМПИАДА

На школьной олимпиаде было предложено для решения 10 задач. За каждую правильно решенную задачу участнику олимпиады засчитывалось по 5 очков, а за каждую нерешенную задачу списывалось по 3 очка.

Сколько задач было правильно решено учащимся, который получил при окончательном подсчете 34 очка? 10 очков?

(М. в Ш., № 1, 1954 г., стр. 69)

Решение

Примем за аргумент число решенных задач; функцией будет соответствующее число полученных очков¹⁾. Здесь аргумент может принимать только целые значения (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), всего — одиннадцать значений, функция — также только одиннадцать значений (например, 10, 34 и др.): следовательно, графиком данной функции будет не сплошная линия, а только одиннадцать отдельных точек. Но из условия задачи ясно, что и здесь равным разностям между значениями аргумента всегда будут соответствовать равные разности между соответствующими значениями функции. Так, например, всякий раз, когда число правильно решенных задач увеличится на 1, число очков увеличится на 8

¹⁾ «Списывание» очков мы будем понимать, как «получение» отрицательного числа очков.

(не будет убавлено 3 очка, да прибавится 5 очков). А это и есть характерное свойство линейной зависимости. Таким образом, для решения данной задачи мы также можем воспользоваться прямолинейным графиком, но учитывать на нем только те точки, которые соответствуют одиннадцати целым значениям аргумента — от 0 до 10. Этот график изображен на рис. 34.

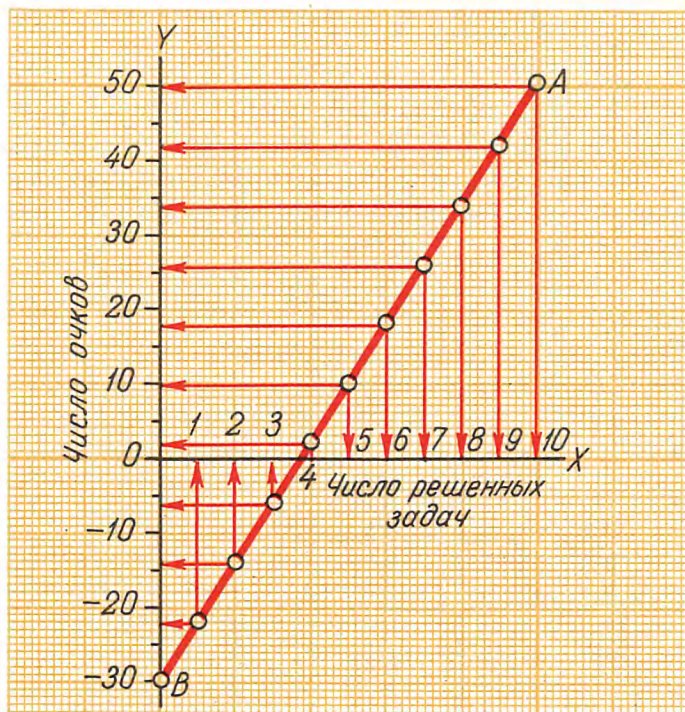


Рис. 34.

Решивший все 10 задач получит $5 \cdot 10 = 50$ очков; отмечаем точку **A** с координатами (10; 50).

Не решивший ни одной задачи получит $(-3) \cdot 10 = -30$ очков; отмечаем точку **B** с координатами (0, -30).

Теперь достаточно провести через точки **A** и **B** прямую линию и отметить на ней точки, соответствующие всем промежуточным случаям, а именно: когда решена только одна задача, две задачи и т. д. Ответ на оба вопроса задачи легко прочесть на графике.

КОТЛОВАНЫ

В одном котловане было 720 м^3 воды, а в другом — 840 м^3 . В 6 час. утра начали откачку воды из первого котлована при помощи насоса производительностью $48 \text{ м}^3/\text{час}$, а в 8 час. — из второго котлована насосом производительностью $72 \text{ м}^3/\text{час}$. В каком часу в обоих котлованах останется воды поровну?

(И. И. Ш., № 314)

Решение

Условие задачи говорит о том, что откачка воды каждым насосом — процесс равномерный и, следовательно, изображается прямолинейным графиком.

Выберем масштабы для осей координат «время — количество воды» (рис. 35) и построим график зависимости между временем и количеством воды в первом котловане. Для этого достаточно иметь две точки искомого графика.

Первую точку (*A*) отмечаем в соответствии с условием: в 6 час. утра в первом котловане было 720 м^3 воды.

Зная, что за каждый час количество воды в первом котловане убывает на 48 м^3 , можно найти вторую точку графика, вычислив, сколько воды будет в котловане, например, в 7 или в 9 час., но через две близкие точки проводить прямую не следует — это может уменьшить точность построения; поэтому вычислим, сколько воды останется в первом котловане, например, к 16 час.:

$$16 \text{ час.} - 6 \text{ час.} = 10 \text{ час.}; 48 \text{ м}^3 \times 10 = 480 \text{ м}^3;$$

$$720 \text{ м}^3 - 480 \text{ м}^3 = 240 \text{ м}^3.$$

Числа 16 и 240 являются координатами второй точки (*B*) искомого графика.

Совершенно так же по точкам *C* (8; 840) и *D* (18; 120) на том же чертеже строим график зависимости между временем и количеством воды во втором котловане.

Теперь достаточно одного взгляда на график, чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос: «В каком часу в обоих котлованах останется воды поровну?»

Ответ: Это произойдет в тот момент, которому соответствует общая точка обоих графиков — точка E , а именно в 17 час.

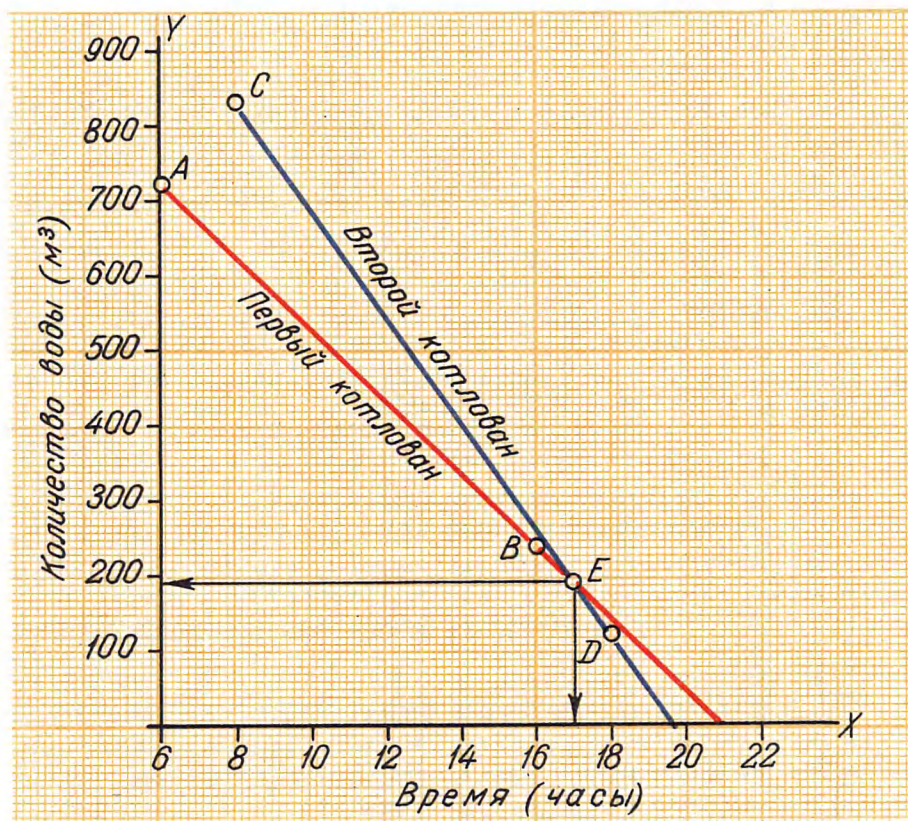


Рис. 35.

Построенные графики дают возможность ответить сразу и на другие вопросы:

1) Когда будет откачан весь первый котлован? второй котлован?

2) Сколько будет воды в каждом из котлованов в любой момент? (Например, в 17 час., когда по условию в них будет поровну воды. Ответ по графику $\approx 190 m^3$; подсчет дает $192 m^3$, однако в данном случае такая неточность вполне допустима.)

Полезно обратить внимание на связь только что рассмотренного графического решения с обычным алгебраическим решением задачи.

Обозначим буквой t число часов, прошедших от 0 час. до искомого момента времени.

Первый насос работал $(t-6)$ час. и откачал $48 \cdot (t-6)$ м³ воды. Следовательно, в первом котловане осталось $720 - 48(t-6)$ м³ воды.

Второй насос работал $(t-8)$ час., так как был включен на 2 часа позже и откачал за это время $72 \cdot (t-8)$ м³ воды; следовательно, к искомому моменту времени во втором котловане осталось $840 - 72 \cdot (t-8)$ м³ воды.

Задача требует определить момент, когда количество воды в обоих котлованах станет одинаковым; это требование выражается уравнением

$$720 - 48 \cdot (t - 6) = 840 - 72 \cdot (t - 8).$$

Решая это уравнение, получаем искомый момент времени: $t = 17$ час.

Графический прием решения, который выше привел нас к тому же результату $t = 17$ час., является геометрической иллюстрацией решения уравнения

$$720 - 48 \cdot (t - 6) = 840 - 72 \cdot (t - 8).$$

Если левую и правую части этого уравнения обозначить через y , то получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y = 720 - 48 \cdot (t - 6), \\ y = 840 - 72 \cdot (t - 8), \end{cases}$$

где t — время, а y — количество воды в каждом из котлованов.

Графиком первого уравнения является прямая AB , графиком второго уравнения — прямая CD .

Точка E пересечения графиков изображает решение системы. Проекция этой точки E на ось «время» указывает значение неизвестного t — искомый момент времени. Проекция точки E на ось «количество воды» указывает значение второго неизвестного y .

КАКИЕ ЯБЛОКИ ДЕШЕВЛЕ?

Директор дома отдыха решил купить яблоки. Первый колхоз продает яблоки по цене 3 руб. за килограмм, второй колхоз — по цене 2 руб. за килограмм, но первый колхоз втрое ближе к дому отдыха, чем второй. Стоимость одного рейса до первого колхоза и обратно для трехтонной машины равна 1 тыс. руб., для восьмитонной — 2 тыс. руб. Добавим еще одно условие: привезти все яблоки необходимо за один рейс и на одной машине.

Где выгоднее купить яблоки и на какой машине их везти?

Исследуйте все возможные случаи.

Решение

Строим (рис. 36) графики сумм расходов (оплата стоимости яблок плюс стоимость их перевозки) для всех возможных случаев:

1) для рейса трехтонной машины за «трехрублевыми» яблоками (из ближнего колхоза);

2) для рейса трехтонной машины за «двухрублевыми» яблоками (из дальнего колхоза);

3) для рейса восьмитонной машины за «трехрублевыми» яблоками;

4) для рейса восьмитонной же машины за «двухрублевыми» яблоками.

По оси абсцисс откладываем количество яблок (в тоннах), по оси ординат — соответствующие затраты на покупку и доставку (в тысячах рублей). Сравнивая эти четыре прямолинейных графика, получаем ответ на поставленный вопрос: где выгоднее купить яблоки и на какой машине их везти?

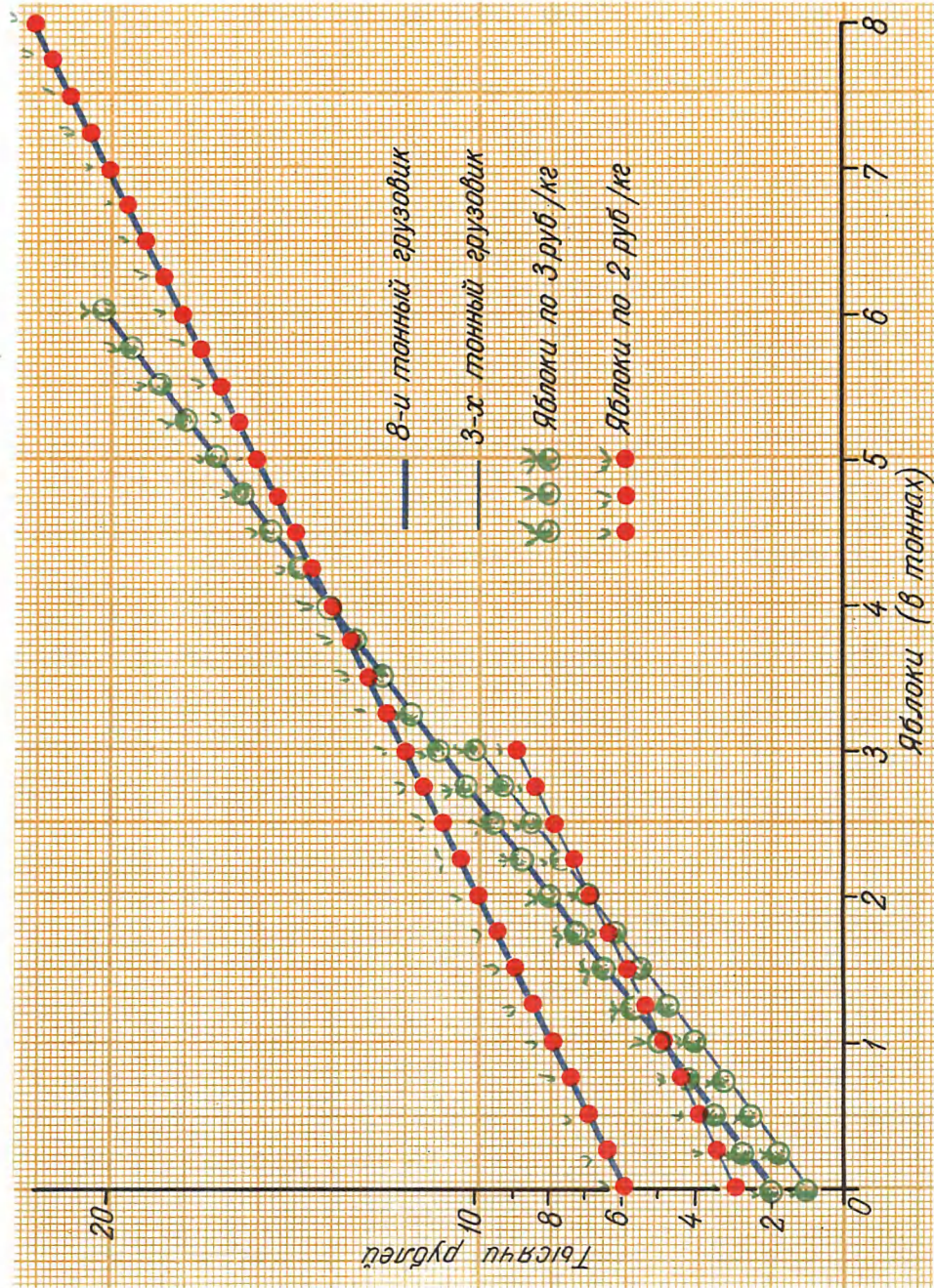
а) Если количество закупленных яблок не превышает двух тонн, то следует ехать на трехтонной машине в ближний колхоз;

б) если требуется закупить от двух до трех тонн яблок, целесообразно ехать на трехтонной машине в дальний колхоз;

в) если требуется заготовить от трех до четырех тонн яблок, лучше всего поехать на восьмитонной машине в ближний колхоз;

г) наконец, при количестве яблок от четырех до восьми тонн следует направить восьмитонную машину в дальний колхоз.

Рис. 36.



Так обстоит дело, если требуется привезти все яблоки на одной машине за один рейс. Если же можно направить две машины (либо сделать два рейса одной машиной), то возможны и другие решения. Например, если требуется закупить 6 тонн яблок, то сумма всех расходов будет одинаковой и минимальной при покупке в дальнем колхозе как в случае одной поездки на восьмитонной машине, так и при двух поездках на трехтонной машине.

Упражнение. Определите для всех возможных случаев, куда и на каких машинах выгоднее поехать за яблоками, если их требуется до 16 тонн.

КАРТИНКИ

Девочка наклеивала в альбом картинки. Если на каждую страницу наклеить по одной картинке, то останутся 4 картинки, если же на каждую страницу наклеить по 2 картинки, то одна страница останется пустой. Сколько было картинок и сколько страниц в альбоме?

(П. С., № 159. 2)

Решение

Примем один и тот же масштаб для изображения на оси OX числа страниц в альбоме и на оси OY числа картинок (рис. 37). Тогда процесс наклеивания на каждую страницу по одной картинке изобразится в виде луча OA , одинаково наклоненного к осям координат: сколько страниц, столько и картинок¹⁾. Но вот заполнена последняя страница альбома, соответствующая точке K на оси OX : а четыре картинки остались не наклеенными. Значит, весь запас картинок можно изобразить ординатой $KB = KA + AB$, где отрезок AB соответствует четырем картинкам.

Второй процесс, когда, по условию, на каждую страницу девочка наклеивает по две картинки, изобразится лучом OC таким, что $KC = 2OK = 2KA$. Но число картинок в обоих случаях одно и то же: мы его изобразили отрезком KB . На втором графике (луч OC) это же число изобразится отрезком LD , равным и параллельным отрезку KB .

¹⁾ Разумеется, на графике OA следует учитывать только те точки, которые соответствуют целым значениям аргумента. То же относится и к графику OC .

Так как при вторичном наклеивании картинок одна страница осталась пустой, то отрезок LK соответствует одной странице.

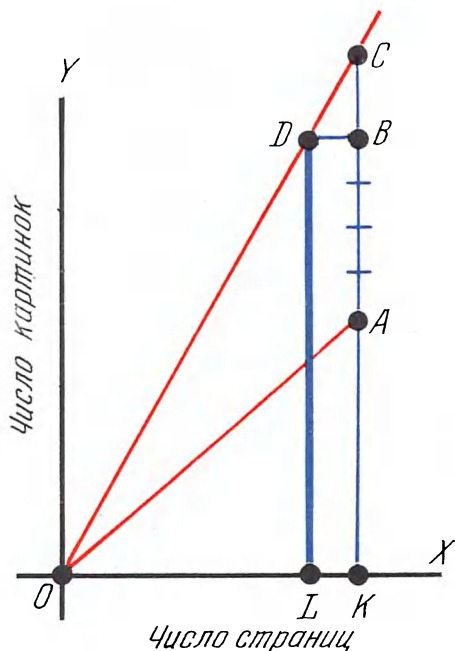


Рис. 37

Треугольники DBC и OKC подобны; следовательно,
 $BC:BD = KC:KO$, отсюда $BC:1 = 2$ и $BC = 2$ (картинки).

Наконец, $KA = AC = AB + BC = 4 + 2 = 6$ (картинок).

Окончательно:

число картинок: $KB = KA + AB = 6 + 4 = 10$,

число страниц: $OK = KA = 6$.

ПОКУПКА МЯЧА

Несколько учащихся внесли на покупку мяча по 50 коп., но оказалось, что собранная сумма на 1 руб. 50 коп. меньше стоимости мяча. Когда же каждый из учащихся прибавил по 10 коп., то вся собранная сумма денег превысила стоимость мяча на 70 коп.

Сколько было учащихся и сколько стоил мяч?

(П. С., № 159. 1)

Решение

Сумма денег, собранная на покупку мяча, пропорциональна числу учащихся, вносивших деньги; следовательно, график этой функции — прямая линия, проходящая через начало координат.

Построим систему координат XOY и из начала O проведем луч OL (рис. 38) под произвольным углом к оси OX . Не заботясь об установлении конкретных масштабов для координатных осей, примем этот

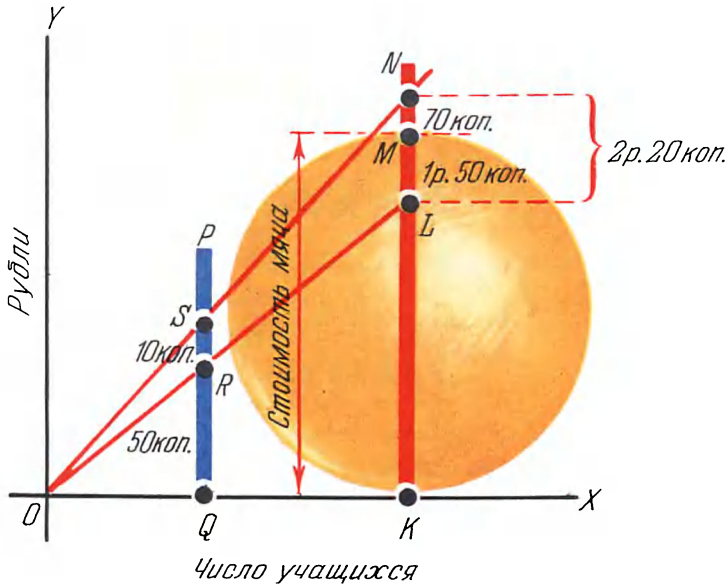


Рис. 38.

луч OL в качестве графика рассматриваемой зависимости для того случая, когда каждый взнос составлял 50 коп. В том случае, когда взнос был увеличен на 10 коп., график должен расположиться выше луча OL . Пусть это будет луч ON ¹⁾.

Если числу всех учащихся, сделавших взносы, соответствует отрезок OK , то сумма, собранная в первом случае, изобразится отрезком KL , а во втором — отрезком KN . Действительную стоимость

¹⁾ Так как количество учащихся — число целое, то на графиках учитываются только те точки, абсциссы которых — целые числа.

мяча можно изобразить ординатой KM , которая на отрезок LM ($=1$ руб. 50 коп.) больше ординаты KL и на отрезок MN ($=70$ коп.) меньше ординаты KN .

Значит, отрезок LN изображает 2 руб. 20 коп.

Пересечем оба графика произвольной прямой $QP \parallel OY$ и положим, что ординаты QR и QS изображают соответственно 50 и 60 коп. Известно, что если две параллельные прямые пересечены лучами, выходящими из одной точки, то прямые пересекаются на пропорциональные отрезки. В данном случае $KL:LN = QR:RS$ или $KL:2,2 = 50:10$. Отсюда $KL = 5 \cdot 2,2 = 11$ (руб.).

Стоимость мяча ($KM = KL + LM$) 11 руб. + 1 руб. 50 коп. $= 12$ руб. 50 коп. Учащихся было:

11 руб.:50 коп. $= 22$ (человека).

ОТЕЦ И СЫН

Отец в 7 раз старше сына, а через 10 лет он будет втрое старше сына. Сколько лет тому и другому?

(А. А., № 110)

Решение

Построим график возраста отца и график возраста сына (рис. 39). Пусть последовательность дат календарных лет изображается точками на оси OX . За начальную точку O можно принять дату любого года, предшествующего рождению отца. На оси OY будем отмечать возраст отца и возраст сына. Понятно, что изменению дат календарных лет на единицу (один год) соответствует и изменение в возрасте человека на один год.

Каковы бы ни были даты рождения отца и сына, графики их возраста — две параллельные наклонные прямые, причем график сына расположен правее графика отца (почему?). Если масштабы для координатных осей одинаковы, то прямые одинаково наклонены к обеим осям.

Отрезок вертикальной прямой, заключенный между построенными графиками, изображает постоянную разность между возрастом отца и сына. По условию, отец в данный момент в 7 раз старше сына, следовательно, должна существовать вертикаль, пересекающая оба графика в таких точках, ординаты которых отно-

сятся как 7:1, или, иначе, отрезок этой вертикали, заключенный между графиками, должен быть в 6 раз больше ординаты точки пересечения этой вертикали с графиком возраста сына.

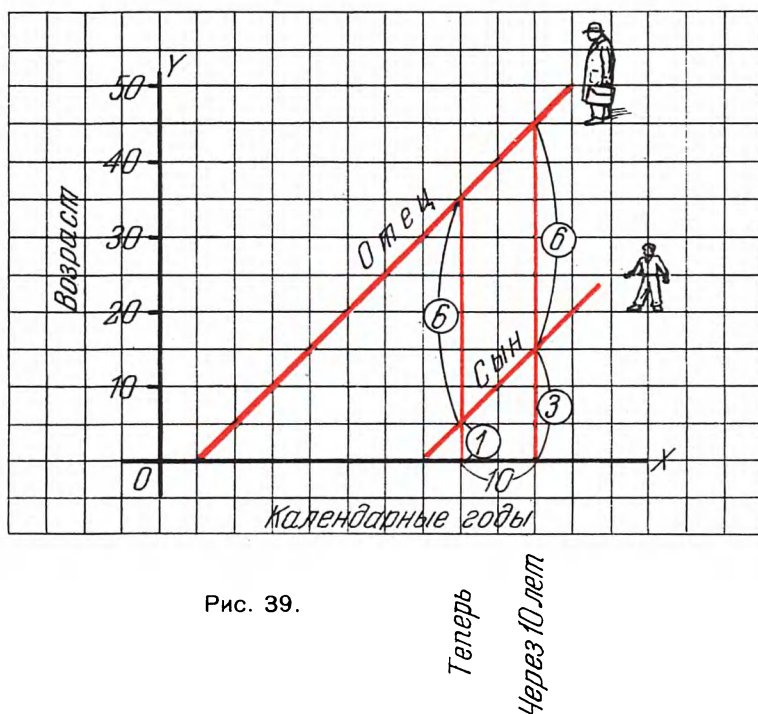


Рис. 39.

Через 10 лет отец будет лишь втрое старше сына. Значит, вторая вертикаль должна пересечь графики возраста отца и возраста сына в таких точках, отношение ординат которых равно числу 3, т. е. отрезок этой вертикали, заключенный между графиками, должен быть в 2 раза больше ординаты точки пересечения вертикали с графиком возраста сына.

Уравняем первые члены отношений 6:1 и 2:1. Для этого заменим отношение 2:1 отношением 6:3. Отсюда следует, что за 10 лет возраст сына увеличится на $3 - 1 = 2$ части, т. е. одна часть составляет 5 лет.

Итак, в данный момент сыну 5 лет, а отцу $5 \cdot 7 = 35$ лет.

Упражнение. Решите эту задачу чисто графически (построением)

Я и Вы

Теперь мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда Вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам вместе будет 63 года.

Сколько теперь лет каждому из нас?

(К., № 253,б)

Решение

Предположим, что задача уже решена графически, т. е. пусть в системе осей «календарные годы — возраст» (см. предыдущую задачу) построены две одинаково наклоненные к осям координат параллельные прямые, изображающие графики возрастов действующих лиц задачи. В таком случае некоторая ордината CA графика «Я» показывает мой возраст теперь (рис. 40).

Повторяя еще раз условие задачи, мы для каждого утверждения найдем его геометрический образ на графике.

Условие задачи	Отображение на чертеже
Теперь мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь	CA $CA = 2CB$ $ED = CB$ EF $EF = CG$

Отсюда следует: $FD = FG = GB = GA = x$, тогда $AB = BC = 2x$ и $AC = 4x$. Далее:

Условие задачи	Отображение на чертеже
Когда Вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам вместе будет 63 года	LK $LK = AC$ $LK + LM = 63$

Но $LK = 4x$; $LM = 4x + x = 5x$; $4x + 5x = 63$, откуда $x = 7$.
Значит, $CA = 4x = 28$ (лет) и $CG = 3x = 21$ (год).

Теперь легко установить и способ построения исходных графиков, точно соответствующих условию задачи. Надо провести две параллельные прямые (расстояние между прямыми произвольное),

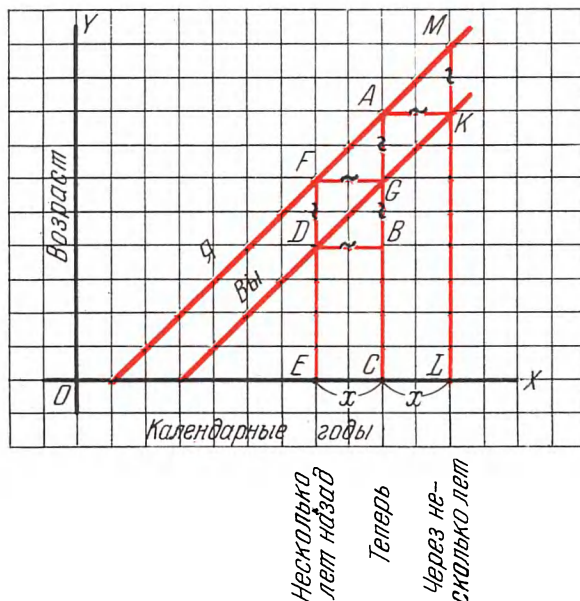


Рис. 40.

вписать ломаную $DFGAKM$, звенья которой образуют с этими прямыми углы, равные 45° , затем отложить $AC = 4AG$ и через точку C перпендикулярно отрезку AC провести ось OX .

КОНФЕТЫ

Некто купил шесть пакетов конфет двух сортов. Каждый пакет содержал конфеты одного сорта, но упакованы они были либо в коробку, либо в мешочек. На каждом пакете была написана его полная стоимость, включая и стоимость тары (коробки или мешочка).

Дома покупатель никак не мог вспомнить цену килограмма конфет каждого сорта, цену и вес пустого мешочка и коробки и даже, в каком пакете были те или иные конфеты. Распечатывать пакеты

не хотелось. Тогда он взвесил каждый пакет и составил приведенную здесь таблицу:

№	Вид пакета	Полный вес	Стоимость
1	мешочек	425 г	15 руб.
2	коробка	450 г	12 руб.
3	мешочек	460 г	16 руб. 40 коп.
4	мешочек	475 г	14 руб.
5	коробка	500 г	16 руб.
6	коробка	550 г	15 руб. 20 коп.

Затем он построил графики и с их помощью легко получил ответы на все интересовавшие его вопросы. Как он рассуждал и действовал?

Решение

Легко понять, что зависимость между весом пакета с конфетами и его стоимостью — линейная. На схеме (рис. 41) показано, как образуется стоимость пакета в зависимости от сорта и веса конфет и тары. График — красная линия.

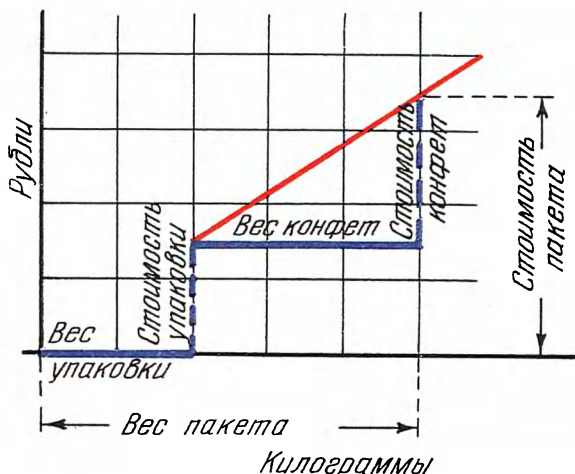
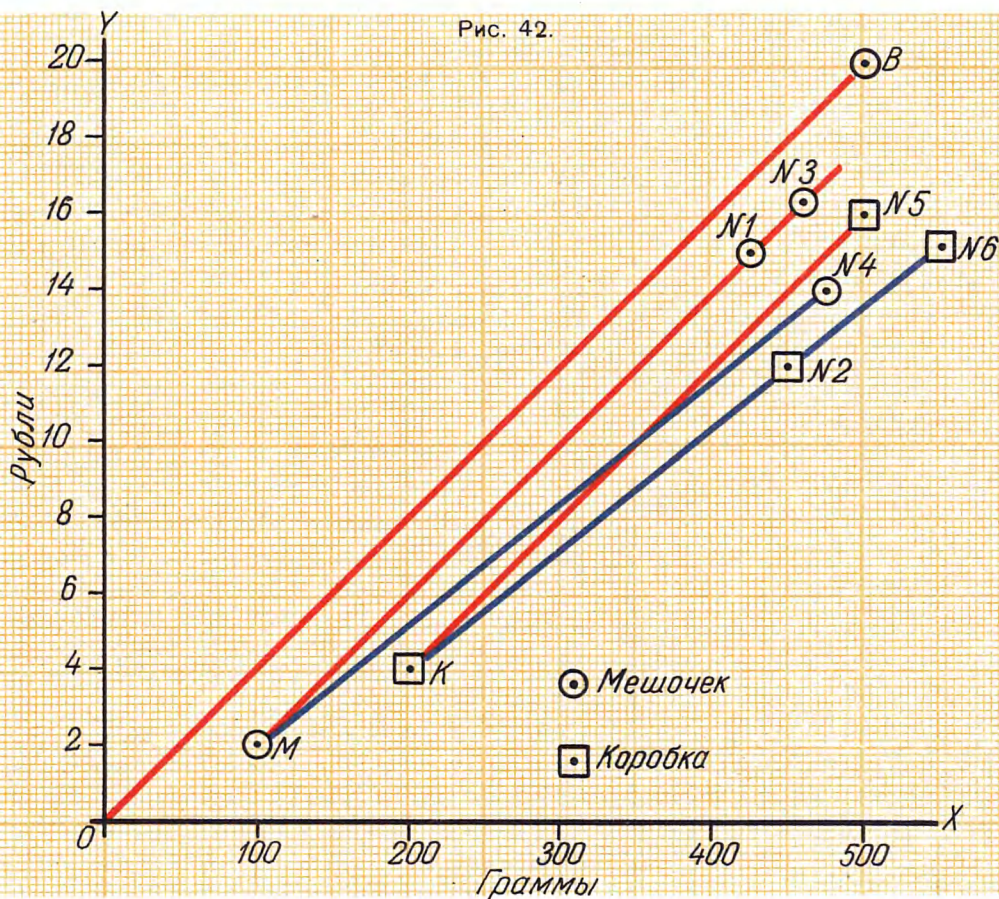


Рис. 41.

Рис. 42.



На точном чертеже (рис. 42) в системе координатных осей «вес — стоимость» отмечаем шесть точек по данным условиям (точки, соответствующие мешочкам, обводим кружками; точки, соответствующие коробкам, — квадратами). Точки, отвечающие конфетам одного сорта и одной упаковки, должны лежать на одной прямой, а точки, отвечающие конфетам одного сорта, но в разных упаковках, должны лежать на параллельных прямых¹⁾.

¹⁾ Потому что при покупке одного и того же веса конфет разность между стоимостью покупки в мешочке и в коробке будет одна и та же: она равна разности между ценами коробки и мешочка.

Начнем с мешочков. Так как сортов конфет два, а точек (кружков) — три, то либо две, либо все три точки должны лежать на одном графике. Точки 1, 3 и 4 не лежат на одной прямой: из трех прямых 1—3, 3—4 и 1—4 только прямая 1—3 образует острый угол с лучом *OX*. Проведя эту прямую, нетрудно по графику определить и цену 1 кг конфет данного сорта (очевидно, более дорогого). Еще удобнее поступить так: проведем *OB* параллельно прямой 1—3 (этим мы как бы исключаем из стоимости пакета стоимость тары и получаем чистую стоимость конфет) и возьмем на прямой *OB* какую-либо точку, например точку *B*. Она указывает, что 500 г конфет данного сорта стоят 20 руб., следовательно, 1 кг стоит 40 руб.

В мешочке № 4 — конфеты более дешевого сорта.

Обратимся к коробкам (точки 2, 5 и 6). Так как эти три точки также не лежат на одной прямой, то, следовательно, две из трех коробок содержат конфеты одного сорта, а одна — другого сорта.

Предположим, что в коробках 2 и 5 — один и тот же сорт, тогда в коробке 6 — более дешевые конфеты. Так как имеется только два сорта конфет, то в коробках 2 и 5 должны были бы находиться более дорогие конфеты, т. е. того же сорта, что и в мешочках 1 и 3. Но прямая 2—5 не параллельна прямой 1—3, следовательно, в коробках 2 и 5 — конфеты различных сортов.

Коробки 5 и 6 не могут содержать конфеты одного сорта, следовательно, коробки 6 и 2 содержат конфеты одного (более дешевого) сорта. Определяем цену 1 кг конфет этого сорта, например, таким же способом, как мы уже определяли выше цену 1 кг конфет более дорогого сорта; она составляет 32 руб.

Через точку 4 проводим прямую, параллельную прямой 6—2; в пересечении с прямой 1—3 получим точку *M*, определяющую вес (100 г) и стоимость (2 руб.) мешочка. Через точку 5 проводим прямую, параллельную прямой 1—3; в пересечении с прямой 2—6 получим точку *K*, определяющую вес (200 г) и стоимость (4 руб.) коробки.

БАССЕЙН

Бассейн наполняется первой трубой за 4 часа. Через 2 часа после открытия первой трубы открыли вторую трубу, через которую весь бассейн может наполниться за 6 час.

Во сколько часов был наполнен весь бассейн?

(И. И. Ш., № 667)

Решение

Построим «графики действия» каждой трубы (рис. 43). По горизонтальной оси будем откладывать время (в часах), а по вертикальной — соответствующее количество воды, которая будет в бассейне в результате действия этой трубы. Это количество будем

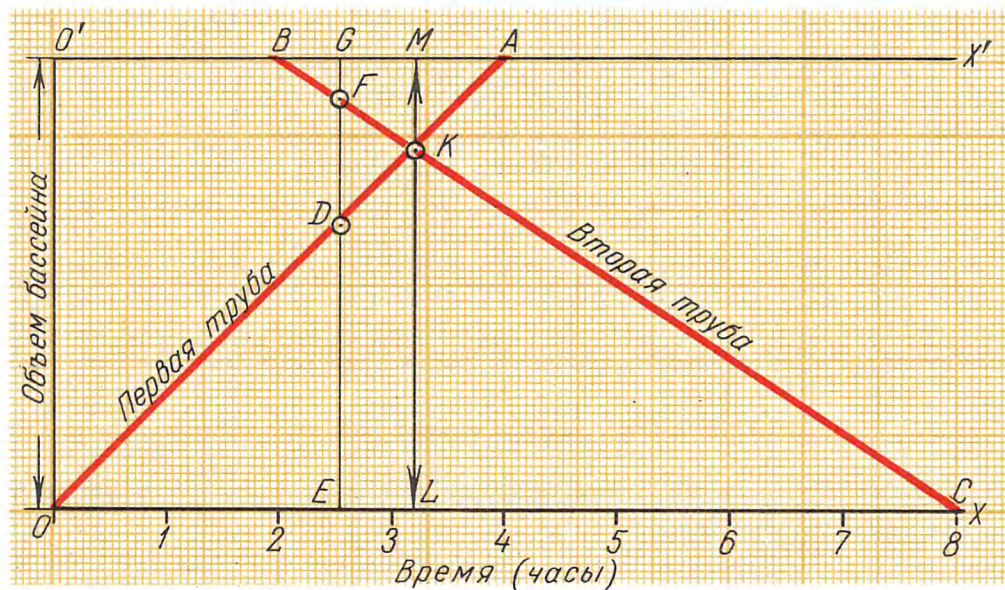


Рис. 43

отмечать в долях всего бассейна: отрезок OO' условно изображает этот объем (при арифметическом решении говорят: «примем объем бассейна за единицу»).

Для удобства проведем две параллельные оси времени — OX и $O'X'$. Отметим на верхней оси точку A (4 часа); тогда отрезок OA — график действия первой трубы. Количество воды, поступившей в бассейн по первой трубе, определяется для любого момента времени E вертикальным отрезком (ординатой) ED .

Далее отметим на верхней оси точку B (2 часа), а на нижней оси — точку C ($6 + 2 = 8$ час.). Отрезок BC можно считать графиком действия второй трубы (отдельно). При этом количество воды,

поступившее в бассейн по второй трубе, для того же момента времени E определяется отрезком GF , где точка G на верхней оси отмечает тот же момент времени, что и точка E на нижней оси. В этот случайный момент времени (E) обе трубы при совместном действии еще не заполнили водой весь бассейн, так как $ED + GF < OO'$.

Теперь ясно, что искомый момент времени соответствует точке K пересечения графиков, так как именно в этот момент $LK + KM = LM = OO'$. Проектируя точку K на нижнюю (или на верхнюю) ось времени, получаем точку L (или M), которая и указывает ответ: 3 часа 12 мин.

Если суть этого приема решения усвоена, то практически такое решение осуществляется быстро, в особенности на миллиметровой бумаге.

Упражнения 1. Во сколько часов наполнится бассейн, если открыть обе трубы одновременно?

2. Через сколько часов после того, как открыли первую трубу, нужно открыть вторую трубу, чтобы бассейн наполнился за 2 часа 40 мин.?

В БИБЛИОТЕКЕ

Библиотеке нужно было переплести 1800 книг. Три мастерские брались каждая самостоятельно выполнить заказ: первая в 20 дней, вторая в 30 дней и третья в 60 дней. Чтобы закончить работу возможно скорее, решили передать заказ сразу всем трем мастерским. Во сколько дней закончат работу мастерские, работая одновременно?

(П. С., № 149.1)

Замечание. Подобно тому как в предыдущей задаче ответ не зависел от величины емкости бассейна, так и здесь для решения задачи совершенно не нужно знать, сколько всего книг должно быть переплетено. Число «1800» (книг) является лишним данным в этой задаче.

Решение

Аналогично предыдущей задаче, приготовим прежде всего две оси абсцисс: OX и $O'X'$ на произвольном расстоянии OO' друг от друга (рис. 44). Масштаб: 2 мм — 1 день. В соответствии с условием за-

дачи. отрезок OA (пунктирная линия) — график работы первой мастерской (отдельно), а отрезок OB — (штриховая) — график работы второй мастерской. Эти графики пересекаются в точке C , и проекция C_0 этой точки на ось времени указывает, во сколько дней была бы выполнена вся работа, изображаемая отрезком OD , если бы она выполнялась только первой и второй мастерскими. Отрезок OC_0

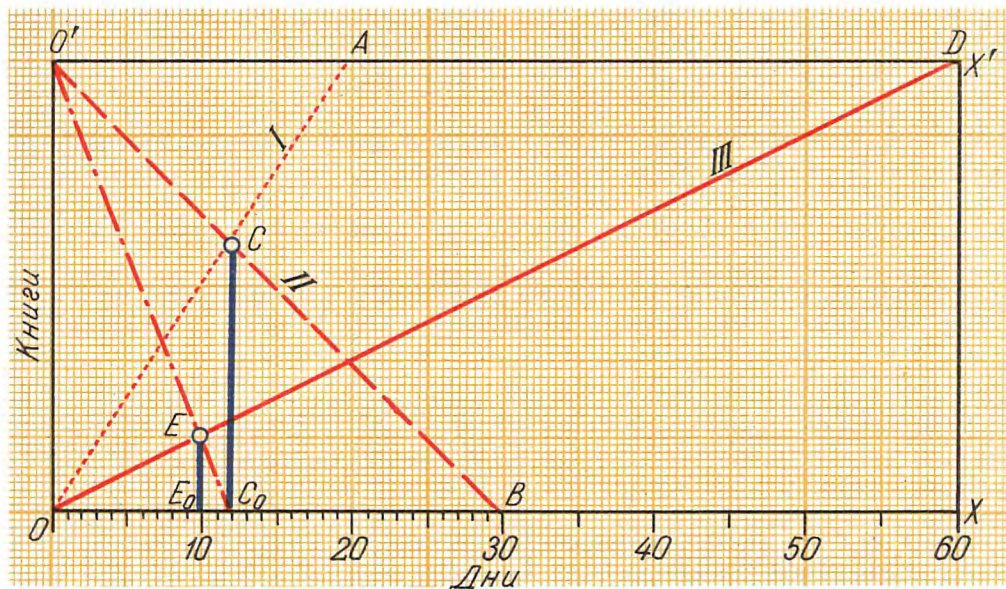


Рис. 44.

(штрих-пунктирный) можно считать графиком совместной работы первой и второй мастерских при условии, что третья мастерская не участвует в этой работе. Включим теперь в работу третью мастерскую. Отрезок OD (сплошная линия) — график ее деятельности (отдельно). Этот график пересекается с отрезком OC_0 в точке E , и проекция E_0 этой точки на ось времени указывает искомый ответ: 10 дней.

Работая совместно, три мастерские выполняют всю работу в 10 дней.

Упражнение. Решите эту же задачу, комбинируя работу мастерских в ином порядке.

ГРИВЕННИКИ И ПЯТИАЛТЫННЫЕ

Сколько существует способов составить сумму в 6 руб. из одних только гривенников (10 коп.) и пятиалтынных (15 коп.)?

Решение

Нетрудно назвать несколько отдельных комбинаций из монет по 10 коп. и по 15 коп., дающих требуемую сумму — 6 руб.

Некоторые из них приведены в таблице.

Комбинации		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
Гривенники	число (<i>x</i>)	60	54	45	33	21	9	—
	на сумму (коп.)	600	540	450	330	210	90	—
Пятиалтынные	число (<i>y</i>)	—	4	10	18	26	34	40
	на сумму (коп.)	—	60	150	270	390	510	600
Всего (коп.)		600	600	600	600	600	600	600

Каждая из этих комбинаций (обозначенных буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G*) дает в сумме 6 руб. и определяется двумя числами: числом гривенников (*x*) и числом пятиалтынных (*y*).

Изобразим каждую комбинацию в виде точки на плоскости следующим образом: примем число гривенников в этой комбинации в качестве абсциссы этой точки, а число пятиалтынных в той же комбинации — в качестве ординаты точки. Тогда семь приведенных в таблице комбинаций изобразятся на координатном поле семью точками *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* (рис. 45).

Легко заметить следующие два факта:

- 1) все семь точек расположены на одной прямой;
- 2) в каждой отдельной комбинации число *x* гривенников и число *y* пятиалтынных, дающих в сумме 600 коп., связаны уравнением

$$10x + 15y = 600.$$

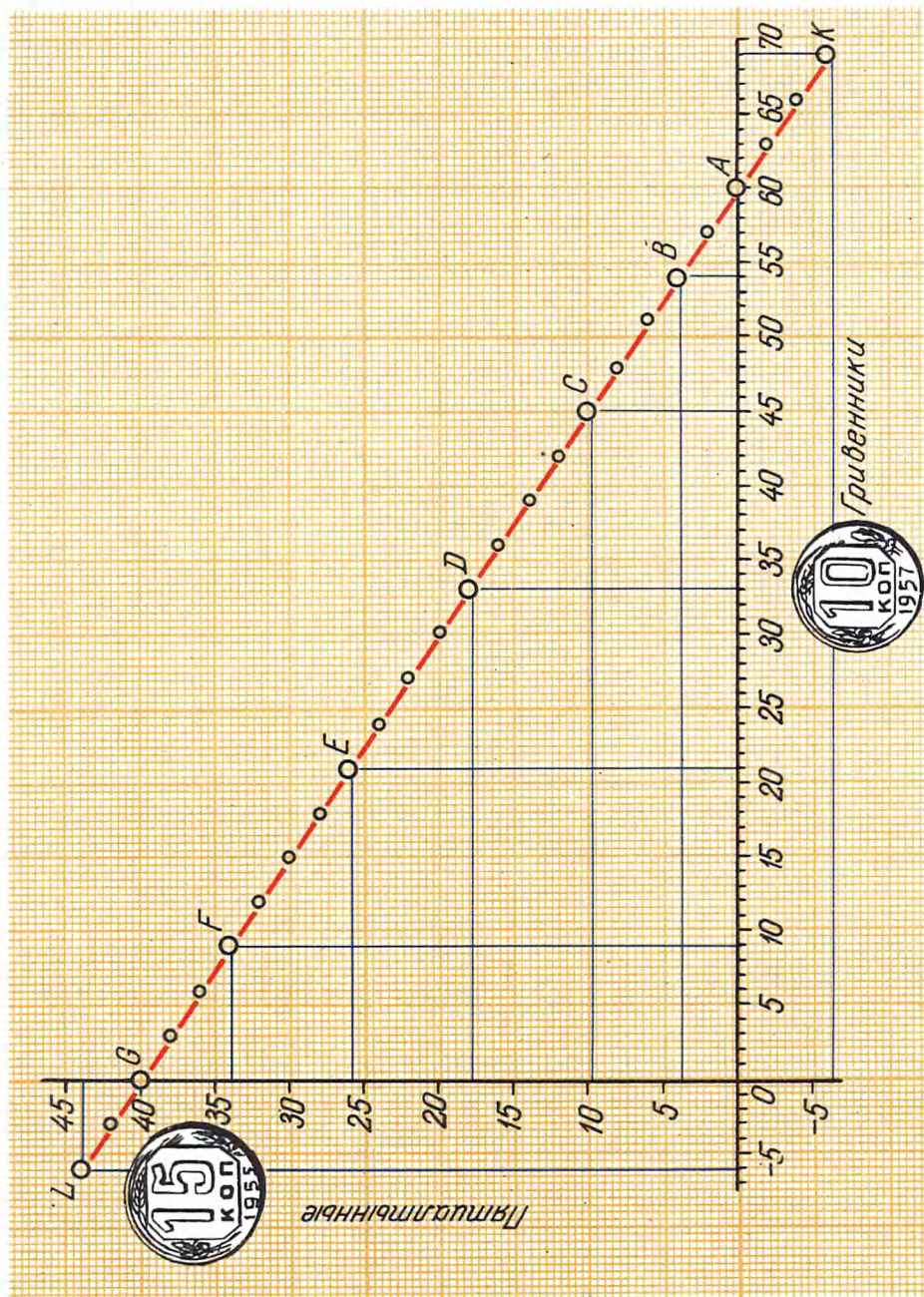


Рис. 45.

Исходя из этих наблюдений, можно высказать предположение о том, что не только в рассмотренных семи комбинациях, но и во всех без исключения случаях составления суммы в 600 коп. из одних только гривенников и пятиалтынных соответствующие точки лежат на той же прямой, и сделать вывод:

геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $10x + 15y = 600$, есть прямая линия AG .

Правильность этого вывода хорошо известна учащимся старших классов.

Все возможные комбинации, удовлетворяющие поставленным условиям (их количество — 21), показаны на графике отдельными точками, начиная точкой A и кончая G .

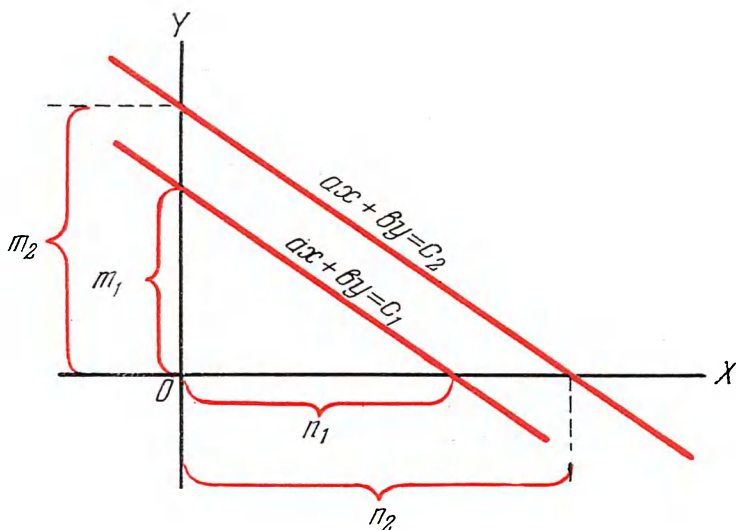


Рис. 46.

Прямую линию AG можно, следовательно, назвать «линией одинаковых сумм двух произведений»¹⁾. При этом каждое слагаемое данной суммы состоит из двух множителей: коэффициента и пере-

¹⁾ Мы сказали «линия одинаковых сумм». А не правильнее ли было бы сказать: «отрезок одинаковых сумм»? Нет, нужно сказать именно «линия», так как можно рассматривать и точки на этой линии за пределами отрезка AG . Правда, в этом случае одна из координат ... отрицательна! Но это имеет следующий смысл: на-

менной величины — координаты некоторой точки прямой линии. Очевидно, что в качестве решений данной задачи на прямой **AG** нужно рассматривать только те точки, для которых обе координаты выражаются целыми числами.

Примечание. Пусть имеем две линейные зависимости: $ax + by = c_1$ и $ax + by = c_2$ с одинаковыми коэффициентами a и b , но разными суммами c_1 и c_2 . Это значит, например, что из монет достоинством в a коп. и из монет достоинством в b коп. один раз составляется сумма c_1 , а другой раз — сумма c_2 .

Докажем, что в данном случае оба графика — параллельные прямые (рис. 46). Полагая в каждом уравнении $x = 0$, мы найдем y ; это будет отрезок m , отсекаемый прямой на оси OY . Полагая $y = 0$, найдем x ; это будет отрезок n , отсекаемый на оси OX .

Для первой прямой: $m_1 = \frac{c_1}{b}$, $n_1 = \frac{c_1}{a}$; для второй прямой: $m_2 = \frac{c_2}{b}$, $n_2 = \frac{c_2}{a}$; отсюда $\frac{m_1}{n_1} = \frac{a}{b}$ и $\frac{m_2}{n_2} = \frac{a}{b}$, или $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, а это значит, что прямые параллельны.

ЯБЛОКИ И ГРУШИ

10 кг яблок и 5 кг груш стоят столько же, сколько 3 кг яблок и 11 кг груш. Один гражданин уплатил в кассу за 14 кг яблок и 6 кг груш. Сколько на уплаченную сумму он мог бы получить:

- 1) только яблок?
- 2) только груш?
- 3) яблок, если груш будет 15 кг?
- 4) груш, если яблок будет 10,5 кг?
- 5) яблок, если груш на 5 кг больше, чем яблок?
- 6) груш, если яблок на 14,5 кг больше, чем груш?
- 7) груш, если их в полтора раза больше, чем яблок?

Решение

Пусть по оси OX откладывается вес яблок, а по оси OY вес груш (рис. 47).

Построим точки $A(10; 5)$ и $B(3; 11)$. Так как 10 кг яблок и 5 кг груш стоят столько же, сколько 3 кг яблок и 11 кг груш, то AB — линия одинаковых сумм двух произведений.

пример, точка K показывает, что если дать 69 гривенников, то, получив сдачи 6 пятиалтынных (т. е. дав «минус 6 пятиалтынных»), мы дадим все те же шесть рублей. Точка L показывает: если дать 44 монеты по 15 коп., мы получим сдачи 6 монет по 10 коп. и сумма будет та же: шесть рублей.

Сумме, уплаченной гражданином, соответствует точка C (14; 6). На сумму, уплаченную гражданином за 14 кг яблок и 6 кг груш, можно купить яблоки и груши в других весовых комбинациях: следовательно, существует линия одинаковых сумм DE , проходящая

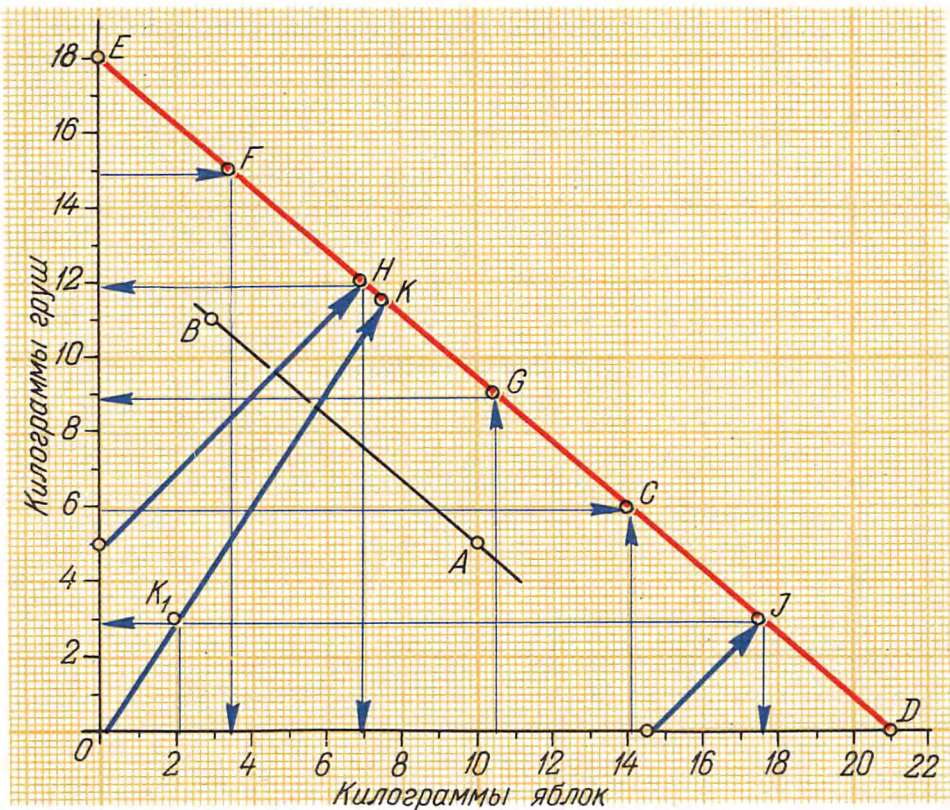


Рис. 47.

через точку C . Прямые DE и AB должны быть параллельными¹⁾, так как в обоих случаях цена 1 кг яблок, а также 1 кг груш неизменна.

Проведем через точку C прямую DE , параллельную AB . Тогда: на первый вопрос отвечает точка D , на второй — точка E ,

¹⁾ См. примечание к предыдущей задаче.

на третий — точка F ,
на четвертый — точка G ,
на пятый — точка H (луч $5-H$ проводим под углом 45° к оси OY),
на шестой — точка J (луч $14,5-J$ проводим под углом 45° к оси OX),
наконец, на седьмой вопрос отвечает точка K (луч OK проведен через точку K_1 , соответствующую 2 кг яблок и 3 кг груш).

Заметьте, что мы получили ответы на поставленные семь вопросов, не зная действительной стоимости фруктов.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

Применяя графики (или, может быть, диаграммы), решите самостоятельно следующие задачи:

МАЛЬЧИК. Мальчик на вопрос, сколько ему лет, отвечал, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было 2 года назад.

Сколько лет мальчику?

(А. А., № 119)

Я, СЕСТРА И ТЕТЯ КАТЯ. Брат говорит сестре: «Когда тете Кате было столько лет, сколько теперь нам с тобой вместе, то тебе было столько лет, сколько мне сейчас. А вот когда тете Кате было столько лет, сколько тебе сейчас, то тогда тебе было...»

Сколько лет было сестре?

(Г., № 243)

КОРОВА И ЛОШАДЬ. Одним и тем же количеством сена можно прокормить корову в течение 60 дней, а лошадь — в течение 36 дней.

На сколько дней хватит этого сена для коровы и лошади вместе при той же дневной норме?

(П. С., № 452)

ДВЕ БРИГАДЫ. Первая бригада может выполнить некоторую работу за 36 дней, а вторая за 45 дней. За сколько дней обе бригады, работая вместе, выполнят эту работу?

(П. С., № 544.1)





Глава четвертая

ГРАФИК РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Весьма пригодны графики для геометрической иллюстрации движения (перемещения). Например, расписание движения поездов всегда разрабатывается при помощи графиков, которые так и называются «графики движения поездов». Наиболее просто графиком изображается *равномерное движение*.

На графике обычно (но не всегда!) по направлению оси OX отсчитывают время, а по направлению оси OY — расстояние. В таком случае (рис. 48, а) абсцисса всякой точки A графика движения (велосипедиста, пешехода, самолета и т. п.) указывает момент времени, а ордината той же точки A — в каком месте пути в этот момент времени находится велосипедист, пешеход, самолет и т. п.

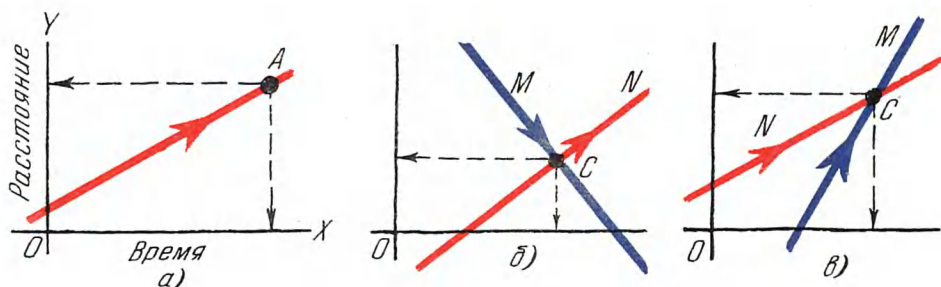


Рис. 48.

Следовательно, график движения дает возможность ответить на вопрос: «где в данный момент находится путешественник?», а также на вопрос: «когда он находился (или будет находиться) в данном месте?»

Совершенно очевидно, что если на одном чертеже построены два графика движения, например графики движения двух пешеходов M и N , и если эти два графика пересекаются в некоторой точке C , то координаты точки C показывают время и место встречи пешеходов. Это будет и в том случае, когда M и N шли друг другу навстречу (рис. 48, δ), и в том случае, когда один из них обогнал другого, который шел впереди, но с меньшей скоростью (рис. 48, ϵ).

Рассмотрим несколько задач на движение. Во всех этих задачах движение принимается равномерным, т. е. с постоянной скоростью.

ДВА ТУРИСТА

Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов A и B . При встрече оказалось, что первый проехал на 30 км более второго и что через 4 дня он будет в B . Второй попадет в A через 9 дней после встречи. Найти расстояние AB .

(М. в Ш., 1953 г., № 1)

Решение

Берем произвольный (рис. 49) отрезок AB , изображающий расстояние между пунктами A и B , прямую AB' в качестве графика движения первого туриста и прямую BA' в качестве графика движения второго туриста. Место и момент встречи определяются точкой O пересечения графиков. Через точку O проведем $KL \parallel AB$.

По условию $KA' = 9$ дней и $LB' = 4$ дня. Обозначим число дней от момента выхода туристов до их встречи через x . Тогда $x = AK = BL$.

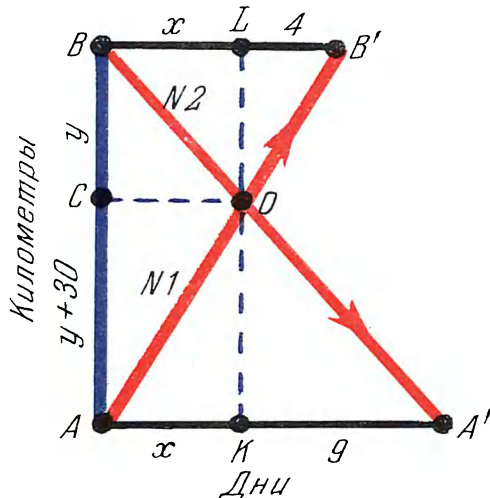


Рис 49.

Имеем две пары подобных треугольников:

$$\triangle AOK \sim \triangle B'OL, \text{ откуда } x:4 = OK:OL;$$

$$\triangle A'OK \sim \triangle BOL, \text{ откуда } 9:x = OK:OL.$$

Отсюда получаем:

$$x:4 = 9:x,$$

$$x = 6 \text{ (дней)}.$$

Обозначим расстояние BC через y . Тогда $LO = BC = y$ и $AC = KO = y + 30$. Из подобия треугольников AOK и $B'OL$ следует

$$OK:OL = AK:B'L \text{ или } (y + 30):y = 6:4.$$

Упрощая эту пропорцию, получим:

$$30:y = 2:4,$$

$$y = 60 \text{ (км)}.$$

Таким образом,

$$AB = 2y + 30 = 150 \text{ (км)}.$$

Кроме того, мы можем определить скорость каждого туриста. Скорость первого:

$$v_1 = OL:LB' = 60:4 = 15 \text{ (км/день)}.$$

Скорость второго:

$$v_2 = OL:LB = 60:6 = 10 \text{ (км/день)}.$$

Очевидно, туристы не очень торопились.

ЕЩЕ ДВА ТУРИСТА-ПЕШЕХОДА

Два пешехода идут навстречу друг другу: один из пункта A , другой из пункта B . Первый выходит из A на 6 час. позже, чем второй из B , и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 час., а второй в A — через 9 час. Найти скорость каждого пешехода.

(Л., ч. II, № 555)

Решение

Как и в предыдущей задаче, изобразим расстояние между пунктами A и B произвольным отрезком AB (рис. 50). Ось времени направим на этот раз вертикально. На перпендикуляре AE , восставленном к AB , отмечаем точку C , принимая, что $AC=6$ час. Пусть прямая CD является графиком движения первого пешехода, а прямая BE — графиком движения второго. Точка G — проекция на AB точки F пересечения графиков — соответствует месту встречи пешеходов.

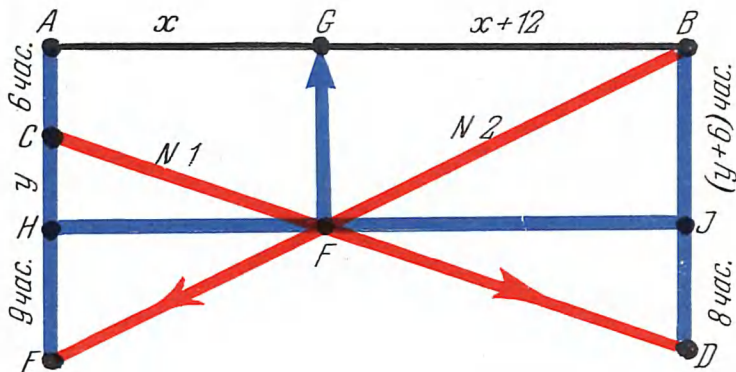


Рис. 50.

Через точку F проведем $HJ \parallel AB$. По условию, $HE=9$ час., $JD=8$ час. и $GB-AG=12$ км. Пусть $CH=y$, тогда $BJ=AH=(y+6)$ час.

$$\triangle BGF \sim \triangle FHE \quad \text{и} \quad \triangle FJD \sim \triangle FHC.$$

Отсюда получаем:

$$(y+6):9 = FJ:FH = 8:y;$$

следовательно,

$$(y+6) \cdot y = 8 \cdot 9,$$

или

$$y^2 + 6y - 72 = 0 \quad \text{и} \quad y = 6 \text{ час.}$$

Далее,

$$\frac{FJ}{FH} = \frac{8}{6}, \quad \frac{FJ-FH}{FH} = \frac{8-6}{6}; \quad \frac{12}{FH} = \frac{1}{3};$$

$$FH = 36 \text{ км} \quad \text{и} \quad FJ = 48 \text{ км.}$$

FH — это путь, который прошел первый пешеход за время, равное $y=6$ час.; FJ — путь, который прошел второй пешеход за $y+6=12$ час. Следовательно, первый пешеход шел со скоростью $36:6=6$ км/час, а второй — со скоростью $48:12=4$ км/час.¹⁾

Приведем для сравнения чисто алгебраическое решение этой задачи²⁾.

Обозначим путь, пройденный первым пешеходом до встречи, через x (км) и заполним таблицу (маленькими цифрами в квадратах указан порядок заполнения отдельных клеток таблицы).

		Скорость движения (в км/час)	Время движения (в час)	Пройденный путь (в км)
До встречи	I из A	$\frac{x+12}{8}$ 9	$\frac{8x}{x+12}$ 11	x 1
	II из B	$\frac{x}{9}$ 10	$\frac{(x+12) \cdot 9}{x}$ 12	$x+12$ 2
После встречи	I из A	$\frac{x+12}{8}$ 7	8 5	$x+12$ 3
	II из B	$\frac{x}{9}$ 8	9 6	x 4

Согласно условию задачи $\frac{9(x+12)}{x}$ больше, чем $\frac{8x}{x+12}$ на 6; следовательно, имеем уравнение

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6,$$

¹⁾ В задаче требовалось определить только скорости пешеходов; эти скорости найдены — 6 км/час и 4 км/час. Если мы не ограничимся этим, то можем установить следующее: расстояние $AB=36+48=84$ км; первый прошел это расстояние за $84:6=14$ час., а второй — за $84:4=21$ час. Нельзя не отметить поистине исключительную выносливость пешеходов. Насколько медленнее ехали туристы, о которых шла речь в предыдущей задаче!

²⁾ Опубликовано в журнале «Математика в школе», № 1, 1954 г., стр. 42.

или, после преобразований,

$$5x^2 - 12 \cdot 12x - 12 \cdot 12 \cdot 9 = 0.$$

Решив уравнение, получаем:

$$x = 36 \text{ км}.$$

Следовательно, второй пешеход прошел после встречи 36 км, а до встречи $36 + 12 = 48$ км. Эти же 48 км прошел первый пешеход после встречи.

Первый пешеход шел со скоростью $48:8 = 6$ км/час.

Второй пешеход шел со скоростью $36:9 = 4$ км/час.

Несомненно, что решение с помощью графиков оказалось нагляднее, прозрачнее. Графики содействовали более целесообразному выбору неизвестного.

ТУДА И ОБРАТНО

Расстояние между двумя колхозами равно 12 км. Колхозник вышел из своего колхоза в 9 час. 25 мин. и пришел в другой колхоз в 13 час. 15 мин. На следующий день он отправился в обратный путь, но вышел в 11 час. и пришел домой в 14 час. 40 мин.

Узнать, на каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который он проходил в один и тот же час как на прямом, так и на обратном пути, и в котором часу он его прошел.

(Б., № 2295)

Решение

Строим графики (рис. 51). Точка пересечения двух прямых определяет искомые величины. Если установлены масштабы для координатных осей, то ответы могут быть «сняты» непосредственно с чертежа:

расстояние — 8,4 км, время — 12 час. 06 мин.

При желании эти ответы легко проверить следующими вычислениями:

На рис. 51 имеются два подобных треугольника (их боковые стороны — графики); основания этих треугольников соответственно изображают:

$$14 \text{ час. } 40 \text{ мин.} - 9 \text{ час. } 25 \text{ мин.} = 5 \text{ час. } 15 \text{ мин.} = 5,25 \text{ (часа)}$$

и

$$13 \text{ час. } 15 \text{ мин.} - 11 \text{ час. } 00 \text{ мин.} = 2 \text{ час. } 15 \text{ мин.} = 2,25 \text{ (часа).}$$

Следовательно,

$$x = \frac{5,25}{5,25 + 2,25} \cdot 12 = \frac{7}{10} \cdot 12 = 8,4 \text{ км.}$$

Далее,

$$13 \text{ час. } 15 \text{ мин.} - 9 \text{ час. } 25 \text{ мин.} = 3 \text{ час. } 50 \text{ мин.,}$$

$$y = \frac{7}{10} \cdot 3 \text{ час. } 50 \text{ мин.} = 2 \text{ час. } 41 \text{ мин.,}$$

$$9 \text{ час. } 25 \text{ мин.} + 2 \text{ час. } 41 \text{ мин.} = 12 \text{ час. } 06 \text{ мин.}$$

Значит, искомый пункт находится на расстоянии 8,4 км от колхоза и колхозник прошел мимо него в 12 час. 06 мин.

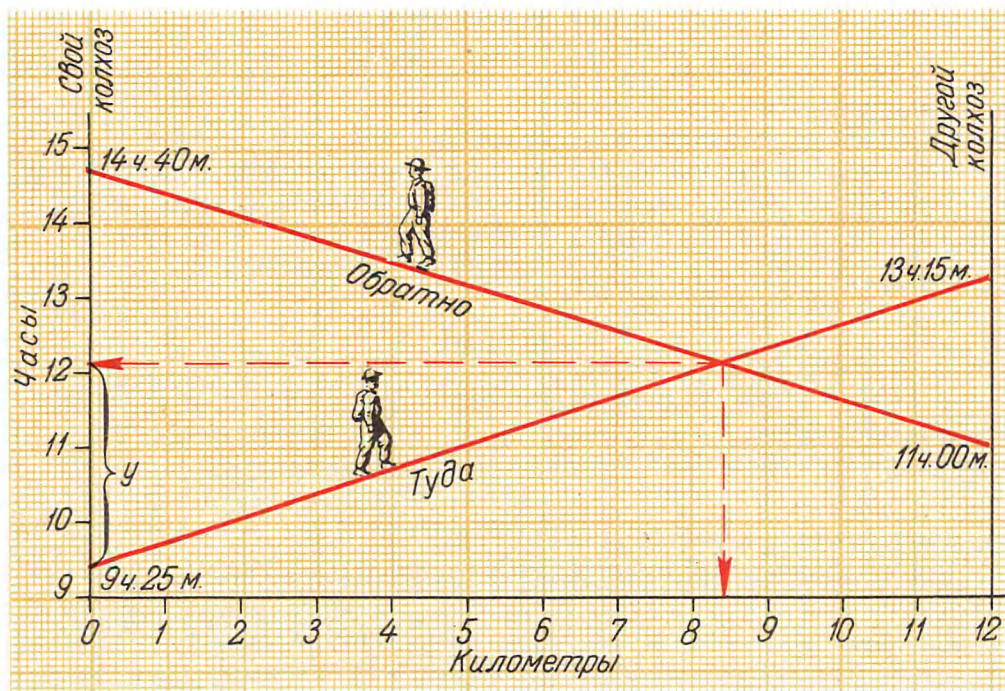


Рис. 51.

ПАССАЖИРСКИЙ ТЕПЛОХОД

Теплоход идет по реке от пристани *A* с постоянной скоростью без остановок.

Когда теплоход проходил мимо пристани *B*, часы в буфете показывали 10 час. 00 мин. При этом буфетчик заявил, что часы не то спешат, не то отстают на 30 мин.

В 12 час. 00 мин. теплоход прошел мимо пристани *C*.

В 15 час. 00 мин. теплоход проходил мимо города *D*, растянувшегося вдоль реки на 5 километров. В путеводителе указаны расстояния от пристани *A* до других пристаней, а именно: до *B* — 25 км, до *C* — 50 км, до *D* — 75 км.

Определить, когда теплоход вышел из *A* и какова его скорость.

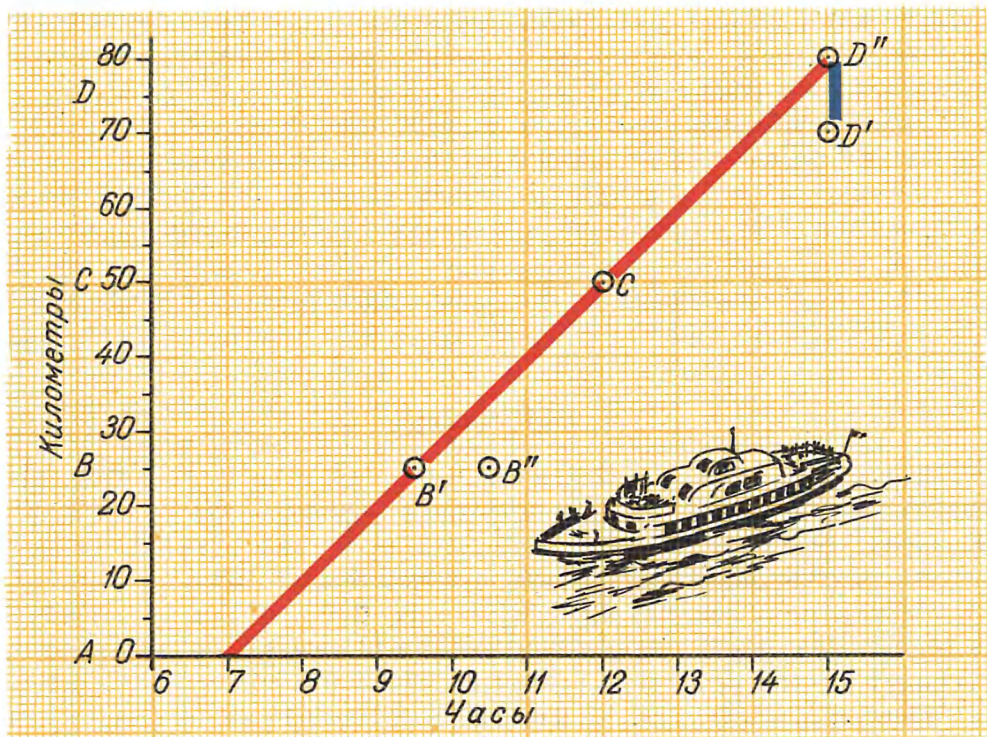


Рис 52.

Решение

Строим координатную систему «время — расстояние». Для упрощения чертежа счет времени начнем не с 0 час., а лучше с 6 час. (рис. 52).

Мимо B теплоход прошел в 10 час. ± 30 мин., т. е. либо в 9 час. 30 мин., либо в 10 час. 30 мин.; на координатном поле отмечаем соответственно две точки B' и B'' .

Затем наносим точку C (12 час.; 50 км).

Пристань может находиться в любом месте города D , поэтому расстояние от A до ближайшей точки города D не меньше, чем $75 - 5 = 70$ км, а расстояние от A до наиболее удаленной точки города D — не более, чем $75 + 5 = 80$ км. Строим на нашем чертеже соответствующий вертикальный отрезок $D'D''$.

Так как скорость парохода постоянна, то для решения задачи нужно найти прямую, которая, во-первых, проходит через одну из точек B' или B'' , во-вторых, проходит через точку C и, в-третьих, пересекает отрезок $D'D''$.

Единственная прямая, удовлетворяющая этим условиям — это прямая $B'D'$. Она и является графиком движения теплохода.

Продолжая эту прямую до пересечения с осью «время», мы находим на ней точку, указывающую время выхода теплохода из A .

Итак, теплоход вышел из A в 7 час.; теперь нетрудно определить его скорость; она равна 10 км/час.

ДВА ПОЕЗДА

Два поезда длиной в 200 м и 100 м движутся по параллельным путям равномерно со скоростью: первый — 60 и второй — 30 км/час.

Сколько времени один поезд идет мимо другого?

Рассмотреть два случая:

1) поезда идут в одном направлении, т. е. один поезд обгоняет другой и,

2) поезда идут в противоположных направлениях, т. е. навстречу друг другу.

(А. А., № 162)

Решение

Подобные задачи встречаются во многих задачниках и решаются арифметически очень просто. Суммарная длина поездов $200 + 100 = 300$ (м). Если оба поезда идут в одном направлении, то скорость одного поезда относительно другого равна $60 - 30 = 30$ (км/час) $= \frac{50}{6}$ (м/сек). Следовательно, один поезд идет мимо другого $300 : \frac{50}{6} = 36$ (сек.)

Если же поезда идут навстречу друг другу, то их относительная скорость равна $60 + 30 = 90$ (км/час) $= \frac{50}{2}$ (м/сек). Следовательно, один поезд пройдет мимо другого за $300 : \frac{50}{2} = 12$ сек.

Так как в обоих случаях делимое одно и то же — сумма длин обоих поездов, — то ответы не изменятся, если мы поменяем длины поездов, т. е. если длина первого поезда будет 100 м, а второго 200 м.

Однако это формальное решение не дает полной картины движения одного поезда относительно другого. В самом деле, какое содержание имеет фраза: «один поезд идет мимо другого»?

Если, например, поезда идут навстречу друг другу, то сначала встречаются их «головы»; с этого момента один поезд «втягивается» в другой. С момента, когда встретятся хвост короткого и голова длинного поезда, весь короткий поезд будет находиться в контакте с длинным поездом. Когда же голова короткого поезда поровняется с хвостом длинного поезда, начнется выход поездов из контакта: он закончится тогда, когда поровняются хвосты обоих поездов.

Фразу «сколько времени один поезд идет мимо другого» обычно понимают как указание промежутка времени, в течение которого имеется контакт одного поезда хотя бы с одной точкой другого поезда.

Но только часть этого промежутка времени короткий поезд будет находиться в полном контакте с длинным. Зависит ли этот промежуток времени от того, какой именно поезд (длинный или короткий) идет с большей скоростью? На каком участке пути имеет место полный контакт короткого поезда с длинным?

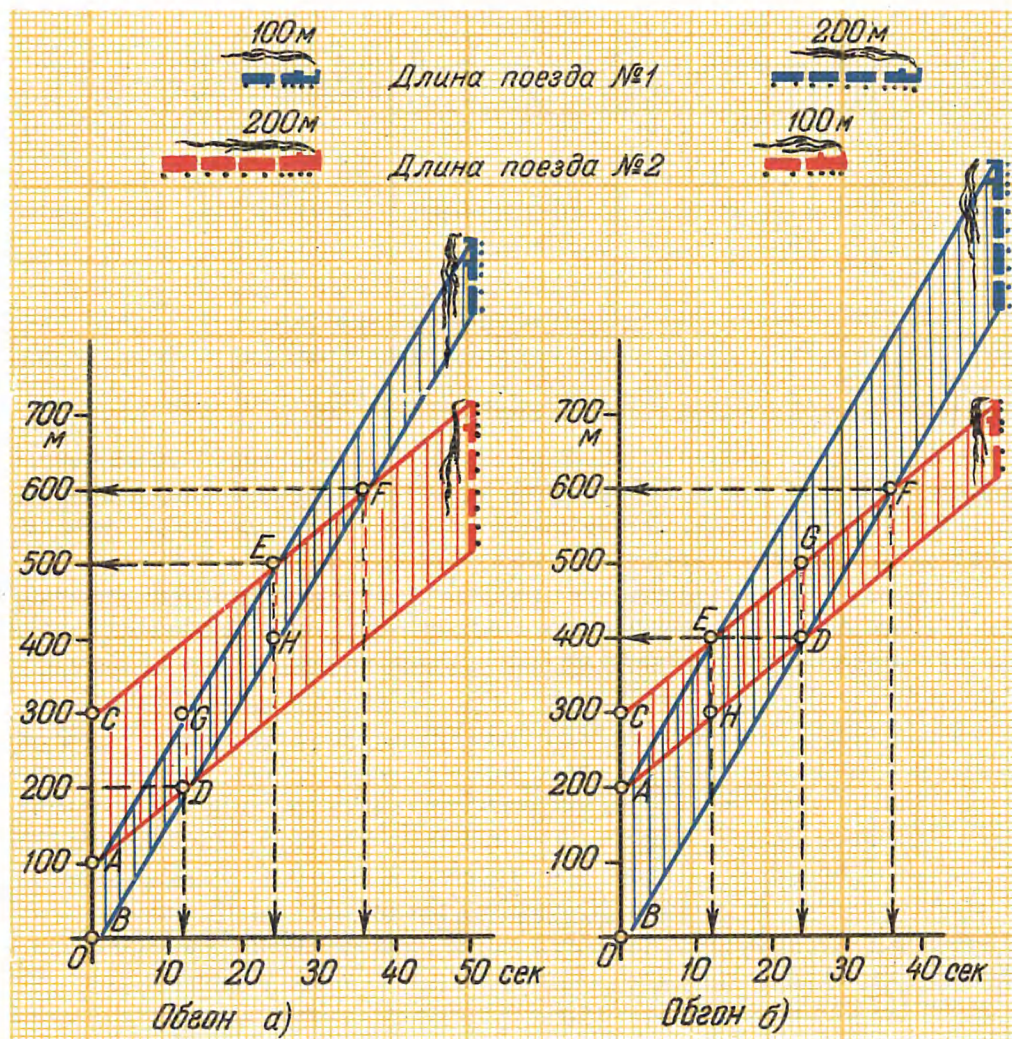


Рис. 53.

Графики дают возможность исчерпывающе проанализировать ход событий.

Рассмотрим первый случай: один поезд обгоняет другой (рис. 53). Начерченные графики а) и б) показывают движение поездов при обгоне с момента совпадения головы поезда № 1 с хвостом поезда № 2 (точка А).

Прямая AE — график движения головы поезда № 1, прямая BF — график движения хвоста того же поезда. Синяя полоса — «график» движения поезда № 1 в целом.

Прямая CF — график движения головы поезда № 2, прямая AD — график движения хвоста того же поезда. Красная полоса — «график» движения поезда № 2 в целом.

Точка E изображает встречу головы поезда № 1 с головой поезда № 2. Точка D изображает встречу хвоста поезда № 1 с

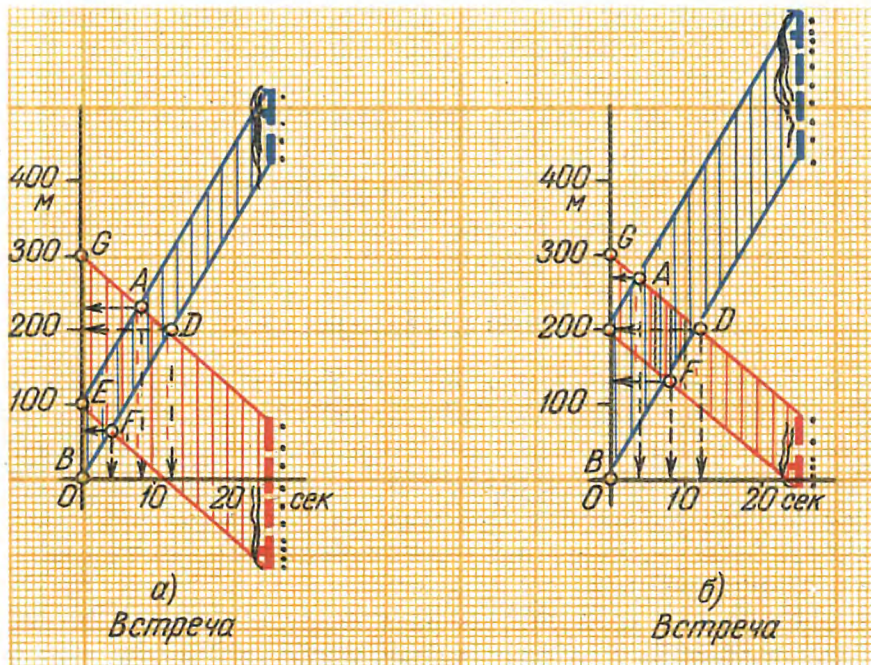


Рис. 54.

хвостом поезда № 2. Точка F изображает встречу хвоста поезда № 1 с головой поезда № 2.

Проекция ломаной AEF (или ломаной ADF) на ось абсцисс указывает время, в течение которого один поезд идет мимо другого. Проекция отрезка AD (на рис. 53, а) и отрезка AE (на рис. 53, б) на эту же ось показывает промежуток времени, в течение которого короткий поезд «втягивается» в длинный; проекция отрезка EF (на рис. 53, а) и отрезка DF (на рис. 53, б) показывает промежуток

времени, в течение которого короткий поезд постепенно выходит из контакта с длинным.

Проекция ломаной *DGE* или *DHE* на эту ось — промежуток времени, в течение которого короткий поезд находится целиком в контакте с длинным.

Проекция ломаной *AEF* (или ломаной *ADF*) на ось ординат указывает участок пути, на котором происходят все три стадии обгона одного поезда другим. Проекция параллелограмма *DGEN* на эту ось указывает участок пути, на котором имеет место полный контакт поездов. Рисунки 53, *a* и *b* показывают, что эти участки разной длины: $500 - 200 = 300$ (м), если поезд № 2 длиннее поезда № 1, и $500 - 300 = 200$ (м), если поезд № 1 длиннее поезда № 2. Что касается времени «полного совпадения» поездов, то этот промежуток одинаков в обоих случаях (он равен 12 сек.).

Упражнение. Найдите значения тех же величин на графиках движения двух встречных поездов (рис. 54, *a* и *b*).

Я И ТРОЛЛЕЙБУСЫ

Однажды я отправился к приятелю. Только я вышел из дома, как от нашей остановки отошел троллейбус, и тогда я решил пойти пешком. Заметив, что в этот же момент мимо меня прошел и встречный троллейбус, я стал считать по дороге и те, и другие троллейбусы. У дома моего приятеля меня обогнал *m*-й попутный троллейбус, а в противоположном направлении проследовал *n*-й встречный троллейбус.

Во сколько раз троллейбусы идут быстрее, чем я, если скорость троллейбусов в обоих направлениях, а также интервалы между ними одинаковы, и я шел с постоянной скоростью?¹⁾

Решение

Строим графики движения попутных троллейбусов (рис. 55) в виде системы параллельных равноотстоящих прямых (синие сплошные линии). Угол наклона каждой из них к горизонтальной оси принимаем произвольным, но меньшим 90° ; расстояние между прямыми также выбираем произвольно.

¹⁾ Условие задачи сообщил нам И. Я. Танатар.

Затем строим графики движения встречных троллейбусов в виде второй системы параллельных и равноотстоящих прямых (синие штриховые линии). Придаем такой наклон этим прямым, чтобы они с отрицательным направлением горизонтальной оси составляли такой же угол, какой составляют прямые первой системы с положительным направлением горизонтальной оси. Расстояние между прямыми второй системы то же, что и для первой системы.

Наконец, построим график моего движения — красную прямую OA , где точка O — начало счета — момент встречи двух троллейбусов у моего дома, а точка A — окончание счета (а также момент встречи двух троллейбусов, но уже у дома моего приятеля).

Так как число попутных троллейбусов m , то число прямых, изображающих движение троллейбусов в направлении моего движения, пересекающих отрезок OA , равно m . Встречных троллейбусов n ; следовательно, в другой системе будет n параллельных прямых, пересекающих OA . Отсюда

$$OB = (m - 1) \text{ интервалов, } OC = (n - 1) \text{ интервалов,}$$

следовательно, $BC = OC - OB = n - m$ интервалов.

Так как $\triangle BAC$ — равнобедренный, то

$$\text{и } BD = \frac{BC}{2} = \frac{n - m}{2} \text{ интервалов}$$

$$OD = OB + BD = m - 1 + \frac{n - m}{2} = \frac{n + m - 2}{2} \text{ интервалов.}$$

Одно и то же расстояние (от моего дома до дома моего приятеля) троллейбус проходит за промежуток времени $BD = \frac{n - m}{2}$ интервалов, а я прохожу за промежуток времени $OD = \frac{n + m - 2}{2}$ интервалов. Следовательно,

$$\frac{\text{скорость троллейбуса}}{\text{моя скорость}} = \frac{OD}{BD} = \frac{n + m - 2}{n - m} = 1 + \frac{2(m - 1)}{n - m}.$$

Упражнение е. Допустим, что вся дорога к моему приятелю идет в гору и что поэтому попутные троллейбусы идут вдвое медленнее, чем встречные, однако интервалы между троллейбусами и на этот раз одинаковые. Каков будет ответ в этом случае?

ДВОЕ ДВИЖУТСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ

Двое движутся по окружности навстречу друг другу. Один пробегает окружность за 3 мин., а другой — за 5 мин. Через сколько минут происходит каждая встреча?

(Б., № 2203)

Решение

Начнем с того момента, когда произошла одна из встреч. Теперь можно считать, что двое движутся по прямой навстречу друг другу и что расстояние между ними равно длине данной ок-

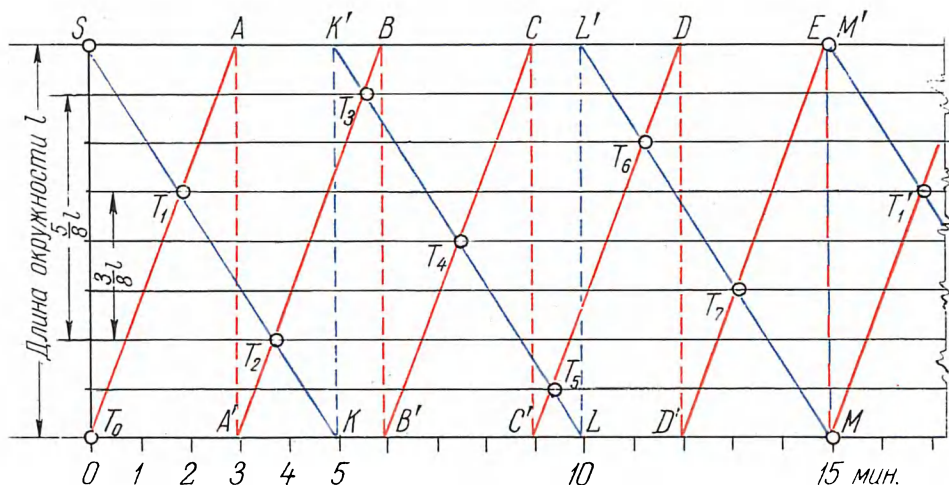


Рис. 56.

ружности. Откладываем на вертикальной оси произвольный отрезок OS , как изображение длины окружности (рис. 56), а на горизонтальной оси в произвольном масштабе — равные отрезки $0-1$, $1-2$, $2-3$ и т. д., изображающие каждую одну минуту.

Красные отрезки OA , $A'B$, $B'C$, ... изображают движение первого по окружности, а синие прямые SK , $K'L$, $L'M$, ... — движение второго по той же окружности (почему?).

Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел 3 и 5 равно их произведению, т. е. $3 \times 5 = 15$. Следовательно, только через 15 мин. положение будет точно такое, какое было в начальный момент. За это время произойдет несколько встреч.

Докажем, что интервалы между каждыми двумя встречами одинаковы. Отрезки T_1T_2 , T_2T_4 , T_4T_5 , T_6T_7 , ... параллельны и равны. Так как эти отрезки одинаково наклонены к оси OX , то их проекции на оси координат также равны между собой. Отсюда следует еще, что путь, проходимый каждым между двумя встречами, всегда одинаков.

Рисунок 56 показывает, что за каждые 15 мин. происходит по 8 встреч; следовательно, каждая встреча происходит через $t = 15:8 = 1\frac{7}{8}$ мин.

Построенный график движения дает возможность ответить и на другие вопросы:

Вопрос: где происходят встречи?

Ответ: в точках, делящих окружность на 8 равных частей; в какой последовательности — ясно из графика.

Вопрос: какую часть окружности проходит каждый между двумя встречами?

Ответ: первый — $\frac{5}{8}$ окружности, второй — $\frac{3}{8}$ окружности.

Упражнение. Решите аналогичную задачу для случая, когда двое движутся в одну и ту же сторону.

ДВА ВЕЛОСИПЕДИСТА

Два велосипедиста едут по велотреку, имеющему длину 900 м. Они встречаются через каждые 2 мин., если движутся в противоположных направлениях, и через каждые 18 мин., если движутся в одном направлении. Определить скорость каждого велосипедиста.

(И. И. Ш., № 461)

Решение

По горизонтальной оси в произвольном масштабе откладываем время (рис. 57), приняв за нуль точку O — момент, когда произошла одна из встреч двух велосипедистов. Точка P на этой оси, изображающая 2 мин., соответствует следующей встрече в том случае, когда велосипедисты движутся в противоположных направлениях, а точка T , изображающая 18 мин., соответствует следующей встрече в том случае, когда велосипедисты движутся в одном направлении.

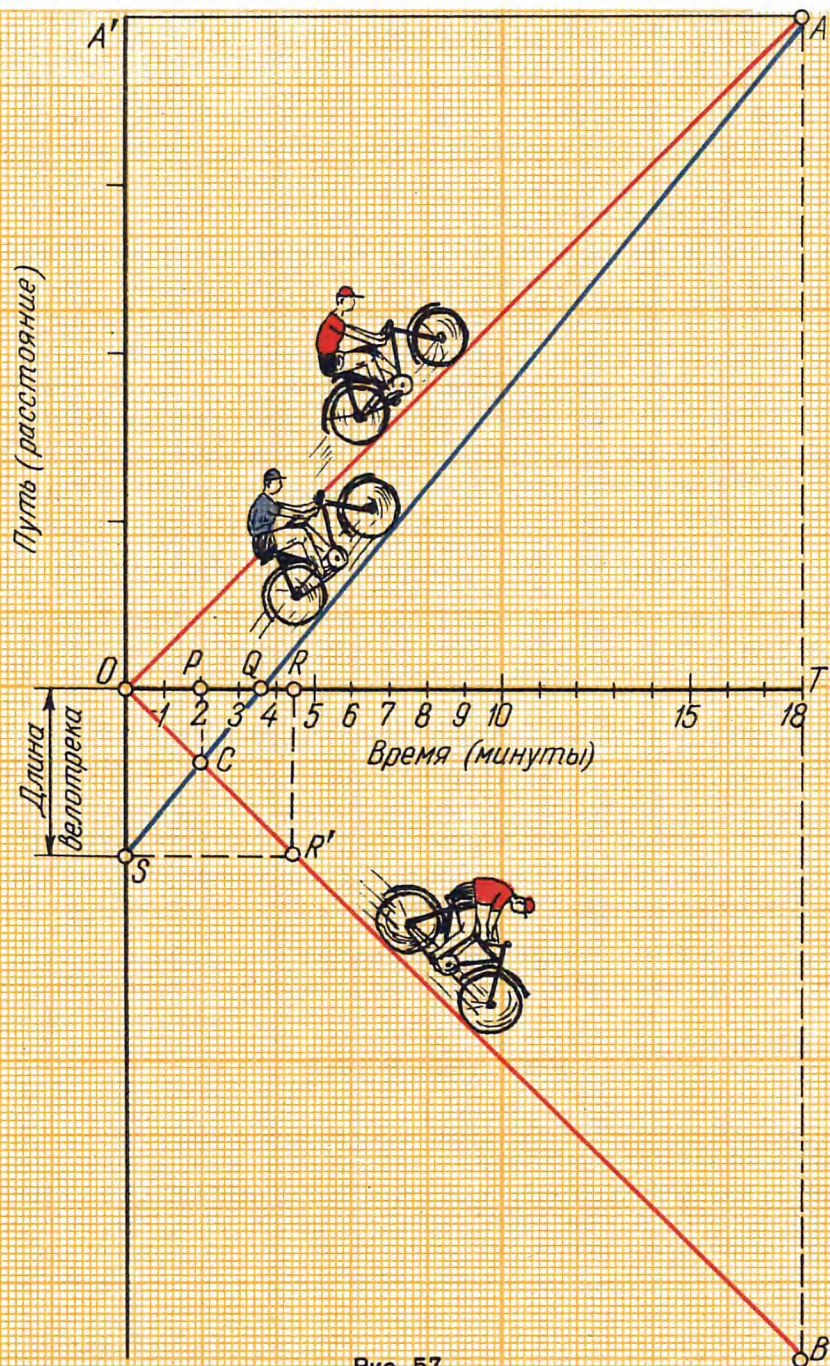


Рис. 57.

Из точки O под произвольным углом к оси OT проводим два симметричных луча OA и OB — графики движения первого велосипедиста в одну и в другую стороны.

Масштаб для изображения расстояний на вертикальной оси пока не устанавливаем.

Восставив к оси OT перпендикуляры в точках T и P , получим в пересечении с графиками OA и OB точки A и C . Они должны быть точками пересечения графиков движения первого и второго велосипедистов, так как их проекции на ось OT указывают время встречи велосипедистов. В таком случае прямая SA (синяя), проведенная через точки C и A , — график движения второго велосипедиста.

При движении велосипедистов навстречу друг другу — от одной встречи до другой — они оба вместе проходят расстояние, равное длине велотрека. Поэтому отрезок OS изображает длину велотрека — 900 м. (Теперь определился масштаб и по оси OA' .) Как показывает график SA , второй велосипедист проезжает эти 900 м за 3,6 мин. (точка Q на оси OT); следовательно, его скорость $\frac{900}{3,6} = 250$ (м/мин). Первый велосипедист проезжает те же 900 м за 4,5 мин. (точка R на оси OT ; $RR' = OS$); следовательно, его скорость $\frac{900}{4,5} = 200$ (м/мин).

Какое расстояние проезжает каждый велосипедист от одной встречи до другой в том случае, если оба едут в одном направлении? За единицу длины принимаем отрезок OS — длину велотрека. Спроектируем точку A на вертикальную ось. Оказывается, что $OA' = 4 \cdot OS$. Значит, первый велосипедист проезжает от встречи до встречи 4 круга, а второй — 5 кругов.

Упражнение. При помощи подобия треугольников проверьте ответ, полученный нами чисто графически.

УПРАЖНЕНИЯ

При помощи графиков решите самостоятельно следующие задачи:

ПАССАЖИРСКИЙ И ТОВАРНЫЙ ПОЕЗДА. Пассажирский поезд проходит расстояние между двумя городами за 10 час., а товарный это расстояние проходит за 15 час. Оба поезда вышли одновременно из этих городов навстречу друг другу. Через сколько часов они встретятся?

(П. С., № 544.2)

ДРУГИЕ ДВА ПОЕЗДА. Из двух станций выходят одновременно навстречу друг другу два поезда и встречаются через 18 час. после своего выхода. За сколько времени второй поезд проходит расстояние между станциями, если первый поезд проходит это расстояние за 1 сутки 21 час?

(П. С., № 548)

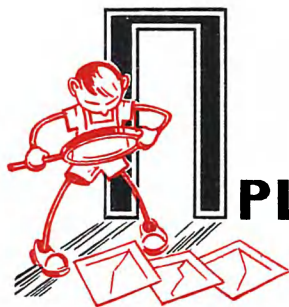
ПЕШЕХОД И ТРАМВАЙ. Пешеход заметил, что через каждые 12 мин. его обгоняет трамвай, а через каждые 6 мин. он встречает трамвай. Считая движение равномерным, найти интервалы между каждыми двумя трамваями.

(III Математическая олимпиада, г. Орджоникидзе, У. М. Н., т. X, в. 4/66)

ДВА ПЕШЕХОДА И ПОЕЗД. Вдоль полотна железной дороги идет тропинка. Поезд, длина которого 110 м, шел со скоростью 30 км/час; в 14 час. 10 мин. поезд догнал пешехода, идущего по тропинке в направлении движения поезда, и шел мимо него в течение 15 сек. В 14 час. 16 мин. поезд встретил другого пешехода, шедшего навстречу поезду, и шел мимо него в течение 12 сек.

Найти момент встречи пешеходов и скорость каждого пешехода.

(П. С., № 1216)



Глава пятая

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОМАНЫХ ГРАФИКОВ

Начнем эту главу двумя примерами.

Пример № 1. Некто за 1 час 10 мин. прошел 6 км — от пункта *A* до станции *B*. На станции он ожидал отхода поезда 15 мин. и уехал из *B* на поезде, который через 10 мин. доставил его на станцию *C*, отстоящую от *B* на 8 км (рис. 58).

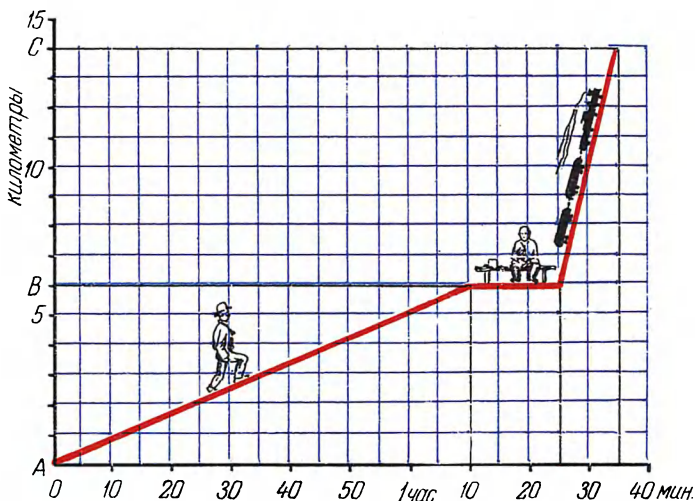


Рис. 58.

Полный график движения этого путешественника не может быть представлен одной прямой линией—приходится строить ломаную линию.

Пример № 2. Рассмотрим следующую таблицу стоимости почтовых переводов:

Сумма перевода (руб.)	Стоимость перевода	Сумма перевода (руб.)	Стоимость перевода
до 30	60 коп.	401—500	10 руб.
31—50	1 руб.	501—600	12 »
51—100	2 »	601—700	14 »
101—200	4 »	701—800	16 »
201—300	6 »	801—900	18 »
301—400	8 »	901—1000	20 »

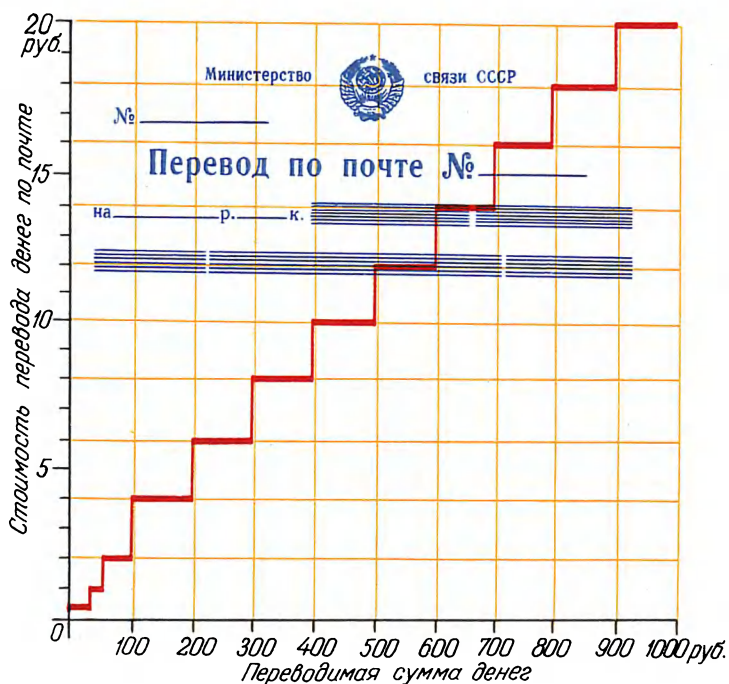


Рис. 59.

График зависимости между суммой денежного почтового перевода и соответствующей оплатой этого перевода представляет собой несколько отдельных горизонтальных отрезков (рис. 59).

Эти примеры показывают, что иной раз вся рассматриваемая совокупность значений аргумента делится на несколько отдельных промежутков, причем на каждом промежутке зависимость линейная, но на втором промежутке она иная, нежели на первом, на третьем — иная, чем на втором, а может быть, и чем на первом, и т. д.

Функцию, определяющую такого рода зависимость, называют *кусочно-линейной*, а соответствующий график — *кусочно-линейным* или, короче, *ломаным* графиком.

Рассмотрим несколько задач с применением для их решения ломаных графиков.

ИНЖЕНЕР И «ПОБЕДА»

Инженер, работающий за городом, ежедневно приезжает на станцию в 8 час. 30 мин. Точно в это же время подъезжает к станции «Победа» и, не задерживаясь, отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на станцию в 8 час. и, не дожидаясь автомобиля, пошел к заводу пешком. Встретив на пути «Победу», он сел в нее и приехал на завод на 10 мин. раньше, чем обычно.

Определите, какое время показывали часы в момент встречи инженера с «Победой» и во сколько раз медленнее он идет пешком, чем едет в автомобиле.

(К., № 275)

Решение

Строим график (рис. 60). Ось OX — время, ось OY — расстояние (от станции). Отсчет времени начнем с того момента, когда инженер вышел со станции по направлению к заводу, т. е. с 8 час. — точка O на оси OX . Пометим на оси OX также точку C (8 час. 30 мин.) — момент прибытия и отбытия «Победы» в обычные дни.

График движения машины изображен сплошной красной линией — это два отрезка, встречающиеся в точке C (8 час. 30 мин.) и одинаково наклоненные к горизонтальной прямой. Угол наклона этих отрезков к горизонтальной прямой выбираем совершенно произвольно, так как масштаб по оси OY не фиксируется. Длина отрезков зависит от расстояния до завода от станции, но так как эта величина не дана и не может быть определена по данным условия задачи, то обрываем графики в произвольных точках.

The graph shows the movement of a pedestrian and a car. The horizontal axis represents time in minutes (0 to 40), and the vertical axis represents distance from the station (0 to 40). The pedestrian starts at the station (0,0) and moves towards point A (25,20). The car starts at point B (20,0) and moves towards point A. From point A, the car moves towards point C (30,0) and then towards point E (40,20). The car's speed is 10 min. per unit distance. The pedestrian's speed is 10 min. per unit distance.

Образовавшаяся в пересечении отрезков точка A указывает, в котором часу (OD) и на каком расстоянии (AD) от станции инженер встретился с машиной.

Треугольник ABC — равнобедренный. Следовательно, встреча инженера с машиной произошла в 8 час. 25 мин. Так как расстояние от станции до этой встречи инженер прошел за 25 мин., а «Победа» проходит это расстояние за 5 мин., то искомое соотношение скоростей $25:5=5:1$. (Как видно, в этой задаче скорость «Победы» занижена.)

ТРИ МАШИНИСТКИ

Работали три машинистки: первая проработала 6 час., вторая — 4 часа, третья — 1 час.

За это время они напечатали всего 98 страниц.

Все трое вместе переписывают за 1 час 28 страниц, а первая и вторая вместе переписывают 54 страницы за 3 часа. Сколько переписывает каждая из них за час?

(Б., № 2185)

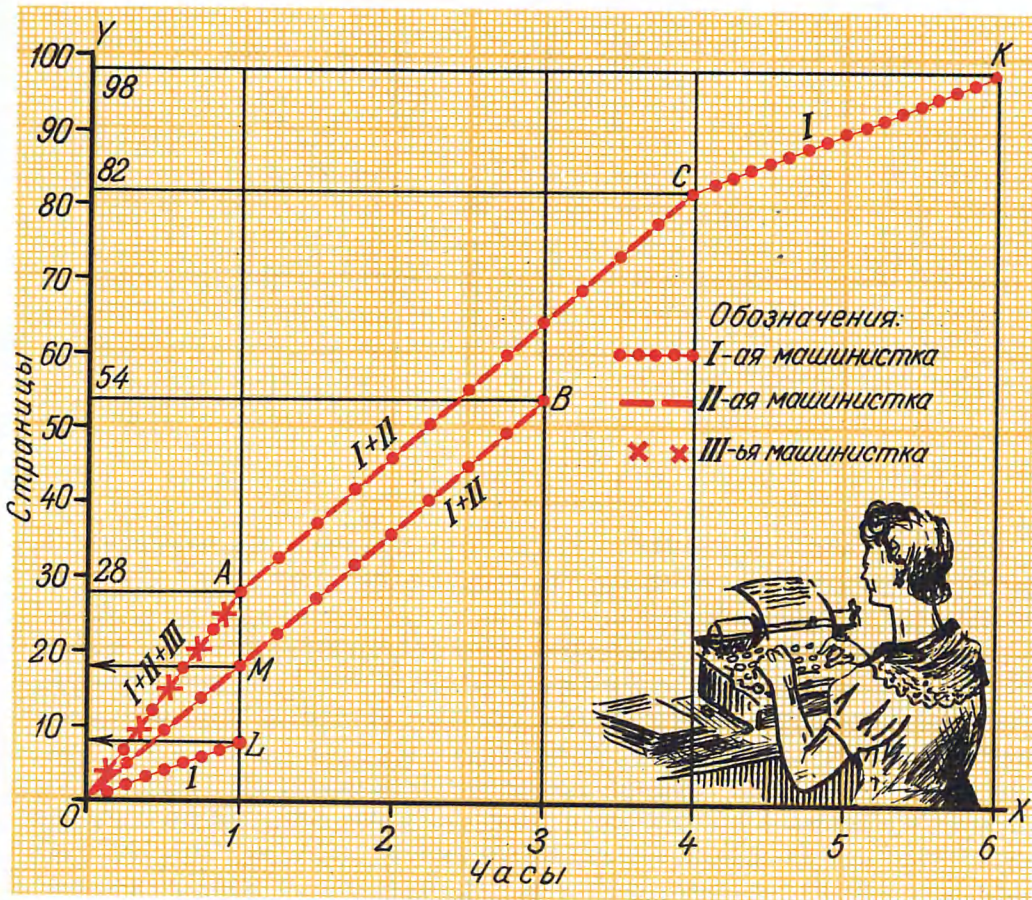


Рис. 61.

Решение

Выбираем масштабы координатных осей (рис. 61) и строим графики по данным условиям задачи (ось OX — время в часах, ось OY — число страниц, переписанных машинистками).

Отрезок OA отражает темп совместной работы всех трех машинисток (28 страниц в час).

Отрезок OB отражает темп совместной работы первой и второй машинисток (54 страницы за 3 часа).

В условии ничего не сказано о том, когда именно работала каждая из машинисток. Независимо от того, как обстояло дело в действительности, мы можем принять, что все три начали печатать одновременно и работали один час; поэтому график выполнения всей работы начнем с отрезка OA .

Далее продолжали работу первая и вторая машинистки в течение трех часов. Так как темп совместной работы первой и второй машинисток известен (показан при помощи отрезка OB), то продолжаем общий график выполнения всей работы построением на трехчасовом промежутке от 1 часа до 4 час. отрезка AC , параллельного отрезку OB . Еще два часа (от 4 до 6 час.) заканчивала работу одна первая машинистка.

Итак, вся работа продолжалась 6 часов и за это время было напечатано 98 страниц. По этим данным отмечаем точку K (6; 98) и соединяем с ней точку C прямолинейным отрезком CK .

Ломаная $OACK$ — график выполнения всей работы. Проведем $OL \parallel CK$ до вертикали, проходящей через точку I , и проектируя отрезок OL на вертикальную ось, получаем скорость работы первой машинистки— 8 страниц в час. Скорость работы второй машинистки определяется отрезком $LM=10$ страниц в час, а скорость третьей— отрезком MA — тоже 10 страниц в час.

ДВЕНАДЦАТЬ ХЛЕБОВ

Двенадцать человек несут двенадцать хлебов. Каждый мужчина несет по два хлеба, женщина по полхлеба, ребенок— по четверть хлеба.

Сколько было мужчин, женщин и детей?

(Г., № 218)

Решение

На бумаге «в клеточку» проведем координатные оси (рис. 62). На горизонтальной оси будем отмечать число людей в масштабе: 1 клетка — 1 человек; на вертикальной оси будем отмечать число хлебов в масштабе: 1 клетка — 1 хлеб.

Строим три вспомогательных графика зависимости числа хлебов от числа людей, которые их несут: от числа мужчин, от числа женщин, от числа детей. Так как число людей обязательно целое, то каждый график состоит из отдельных точек (с целочисленными абсциссами), лежащих на одном луче, исходящем из начала координат.

Для числа хлебов у мужчин (каждый несет по 2 хлеба) график состоит из точек A_1, A_2, A_3, \dots , расположенных на черном луче OA_6 . График количества хлебов у женщин (каждая несет по полхлеба) — отдельные точки, расположенные на красном луче OB . Для числа хлебов у детей (каждый несет по четверть хлеба) график состоит из отдельных точек только с четными абсциссами (почему?), расположенных на синем луче OC .

Вспомогательные графики помогут нам построить один (ломаный) график, показывающий возможное распределение двенадцати хлебов между мужчинами, женщинами и детьми в соответствии с условием задачи. Этот график должен состоят из трех звеньев, параллельных соответственно лучам OA_6 , OB и OC ; он должен начинаться в точке $O(0, 0)$ и оканчиваться в точке $K(12; 12)$, указывающей общее число людей и общее число хлебов.

Пусть первое звено искомого ломаного графика имеет направление луча OA_6 . Зная, что последнее звено оканчивается в точке K и параллельно либо лучу OB , либо лучу OC , проведем для пробы через точку K прямую, параллельную OB . Эта прямая пересекает луч OA_6 в точке A_4 . Тогда ломаный график OA_4K изображает такое распределение хлебов: четверо мужчин несут 8 хлебов и восемь женщин несут 4 хлеба: всего — 12 человек и 12 хлебов. Но этот случай не удовлетворяет всем требованиям задачи: исчезли дети! Ищем другое решение.

Через ту же точку K проведем прямую $KL \parallel CO$. Прямая KL пересекает луч OA_6 в точке, абсцисса которой не выражается целым числом. В противоположность первому случаю это означает, что

без «женского» звена вообще невозможно построение искомого ломаного графика. Поищем возможность в образовавшуюся черносиню ломаную вставить недостающее «женское» звено — красный

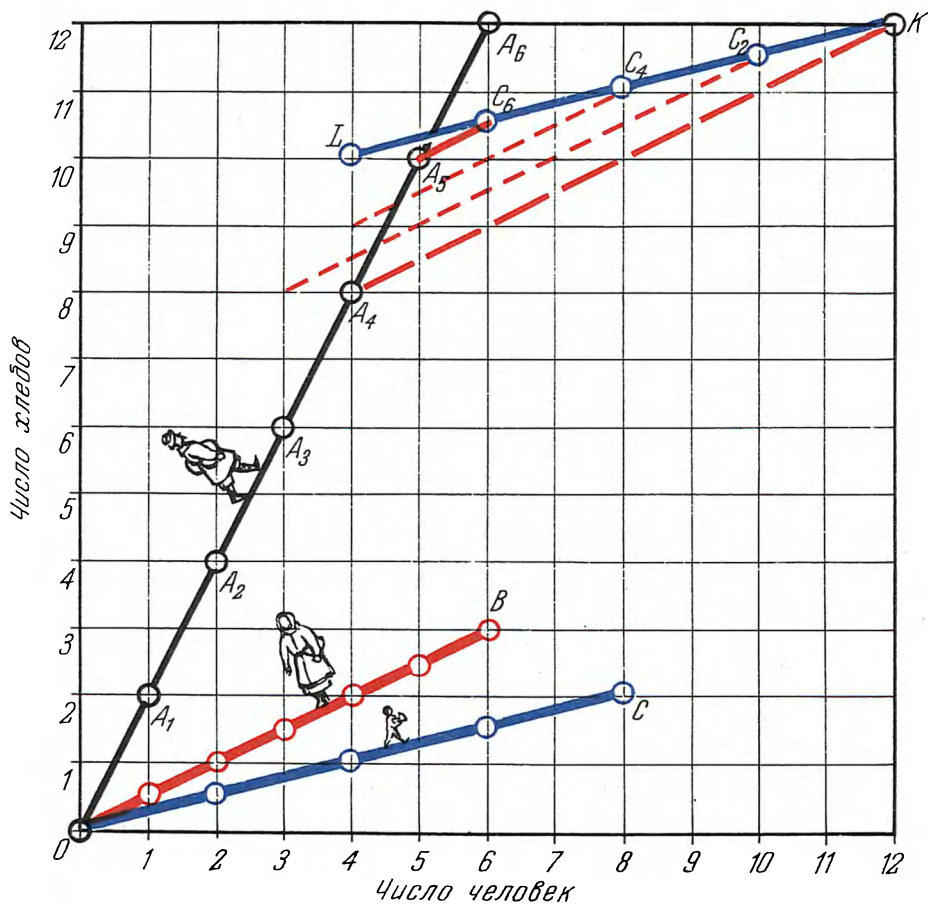


Рис. 62.

отрезок, параллельный отрезку OB . Левый конец красного звена должен быть в одной из точек черного («мужского») луча OA_6 , а правый конец — в одной из точек C_6 , C_4 или C_2 синего («детского») звена.

Если бы этим условиям не удовлетворял ни один из отрезков, то задача не имела бы решения. Но, как легко убедиться, в данном

случае указанным требованиям удовлетворяет единственный отрезок, а именно, отрезок A_5C_6 . Следовательно, искомый график — совокупность отдельных точек ломаной OA_5C_6K .

Итак, было:

мужчин — 5, они несли $5 \times 2 = 10$ хлебов,

женщин — 1, она несла $\frac{1}{2}$ хлеба,

детей — 6, они несли $6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ хлеба.

Всего 12 человек, они несли 12 хлебов.

БЕТОННЫЕ БЛОКИ

Первого июля начнется строительство объекта № 1. Графиком работ намечено устанавливать на этой постройке каждый день по 10 блоков. Всего на объекте 600 таких блоков; следовательно, блоки будут устанавливаться в течение 60 дней.

23 июля начнется строительство объекта № 2 по тем же чертежам и по аналогичному графику.

Требуется составить график изготовления 1200 блоков, учитывая при этом, что:

1) имеющееся оборудование позволяет изготавливать ежедневно по 10 бетонных блоков;

2) после изготовления бетонного блока он должен быть «выдержан» до установки на место (в сооружение) в течение 28 дней для приобретения бетоном требуемой прочности.

Ответьте на два вопроса:

1) За сколько дней до начала строительства следует начать изготовление блоков?

2) Какова должна быть емкость склада готовых блоков, т. е. какое наибольшее количество блоков потребуется хранить одновременно на складе?

Решение

Прежде всего заметим, что слово «день» имеет в нашей задаче два значения: «календарный день» и «рабочий день». Конечно, бетон твердеет не только в рабочие, но и в выходные дни, поэтому число 28, указанное в условии, — это число календарных дней.

Построим теперь график нарастающей потребности в готовых блоках для строительства объектов № 1 и 2 вместе (*график установки блоков*). Пусть (рис. 63) последовательность рабочих дней изображается точками горизонтальной оси (1 день = 1 мм), а количество блоков, которые должны быть изготовлены к определенному дню — точками вертикальной оси (20 блоков = 1 мм).

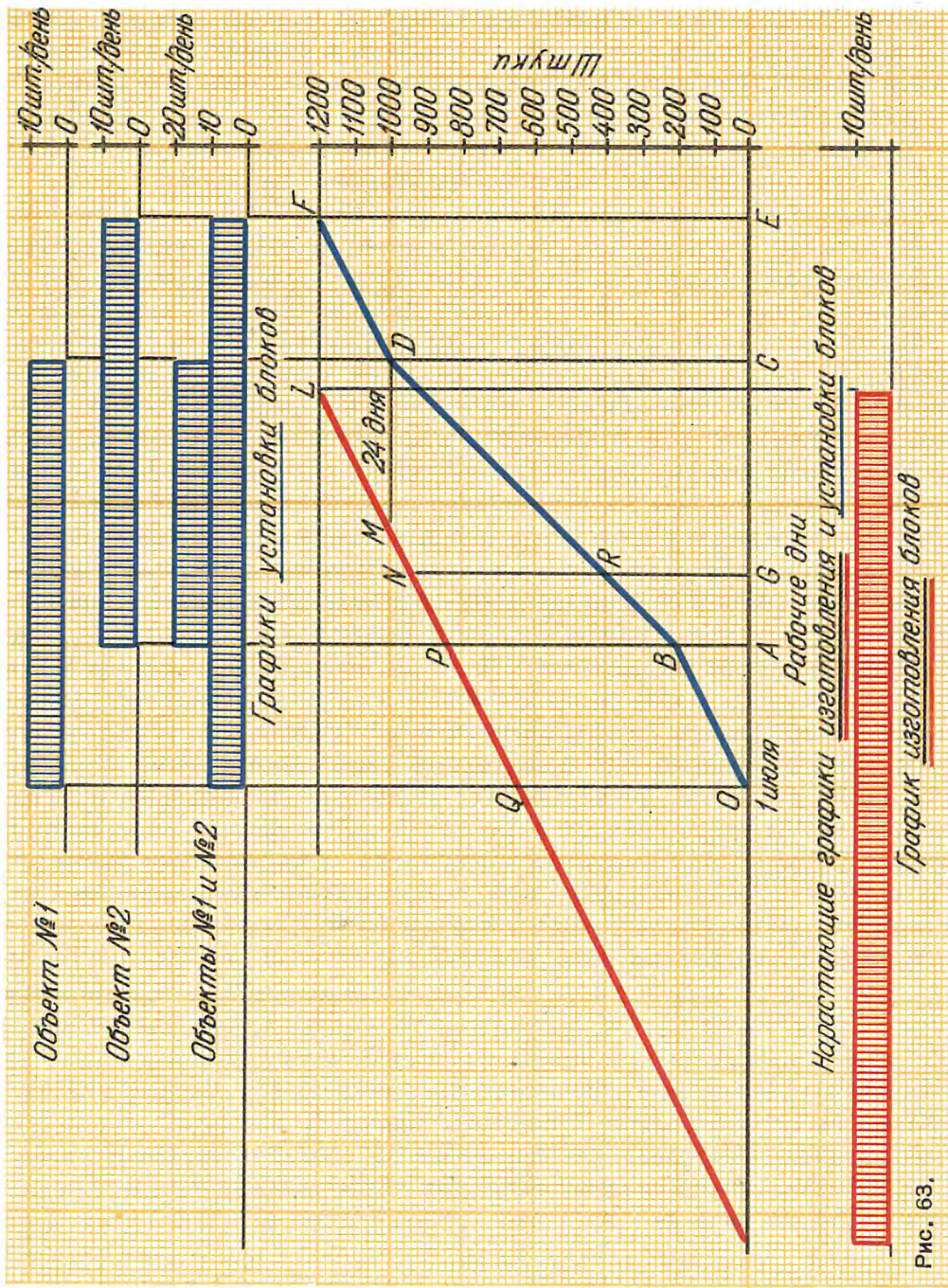
Зная, что с 1 июля по 22 июля (*OA* — 20 рабочих дней) за каждый рабочий день будет устанавливаться по 10 блоков (работы производятся только на объекте № 1), мы строим первое звено *OB* искомого графика (*AB* — 200 блоков). Следующие 40 рабочих дней (*AC*) работы будут производиться на объектах № 1 и 2 одновременно; это значит, что за каждый рабочий день будет устанавливаться по 20 блоков. В соответствии с этим строим второе звено *BD* искомого графика (*CD* — 1000 блоков). Наконец, за каждый день последних двадцати рабочих дней (*CE*) опять будет устанавливаться только по 10 блоков; строим последнее звено *DF*. Ломаная *OBDF* — искомый график потребности в готовых блоках (график установки блоков).

Далее, на том же чертеже построим *график изготовления блоков*. По условию, это — прямая (процесс изготовления блоков — равномерный), угол наклона которой к горизонтальной оси определяется заданной производительностью: 10 блоков в день. Это значит, что искомая прямая параллельна отрезкам *OB* и *DF*. Расположение же ее определяется требованием, чтобы возраст блока к моменту его установки в сооружении был бы 28 календарных дней, а так как за 4 недели ($28:7=4$) будет четыре нерабочих дня, то эти 28 календарных дней соответствуют периоду в 24 рабочих дня. Это значит, что искомая прямая (график изготовления блоков) должна быть расположена относительно ломаного графика *OBDF* так, чтобы любое горизонтальное сечение этих графиков давало отрезок между графиками, соответствующий не менее чем 24 рабочим дням.

Для построения такого графика откладываем по горизонтали влево от «угловой» точки *D* отрезок *DM*, соответствующий 24 дням. Точка *M* принадлежит искомому графику.

Зная точку *M* и наклон искомого графика (10 блоков в день), построить его нетрудно. Это будет прямая *KL* (красная).

Отрезок *KO* определяет в масштабе, выбранном для горизонтальной оси, что изготовление блоков необходимо начать не позже, чем за 64 рабочих дня до начала работ на объекте № 1.



Переходим к вопросу о емкости склада. Ордината любой точки графика KL , например отрезок GN , показывает общее количество блоков, изготовленных к дате, отмеченной буквой G ; ордината любой точки ломаного графика $OBDF$, например отрезок GR , показывает общее количество блоков, уложенных в сооружении к дате, отмеченной точкой G . Поэтому разность этих двух вертикальных отрезков (отрезок RN) показывает разность между количеством изготовленных и израсходованных блоков к моменту G , т. е. наличие блоков на складе. Следовательно, емкость склада надо устанавливать по величине наибольшего из вертикальных отрезков, заключенных между наклонной KL и ломаной $OBDF$. Таковым оказывается, например, отрезок OQ , или равный ему отрезок BP . По вертикальному масштабу определяем, что отрезку OQ соответствует 640 блоков.

Следовательно, емкость склада должна быть 640 блоков.

Упражнения. Определите по этому графику:

1) Сколько блоков будет находиться на складе в день окончания изготовления блоков?

2) Каков наибольший возраст блоков, находящихся на складе в этот день (принимается, что блоки устанавливаются в сооружении в той же последовательности, в которой они изготавливаются)?

РЕПЕТИТОР

Так называется рассказ А. П. Чехова. Петя Удодов тщетно пытается решить заданную ему на дом задачу, а его репетитор также не может сообразить, как приступить к решению. Вот эта задача.

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное — 3 руб.?

Решение

Пусть графики помогут Пете и репетитору (рис. 64). Один аршин синего сукна стоит 5 руб., следовательно, 100 аршин стоят 500 руб. Отмечаем точку M (100 аршин, 500 руб.) и строим луч OM — график стоимости синего сукна. Один аршин черного сукна стоит 3 руб.; следовательно, 100 аршин стоят 300 руб. Отмечаем точку N (100 аршин, 300 руб.) и строим луч ON — график стоимости

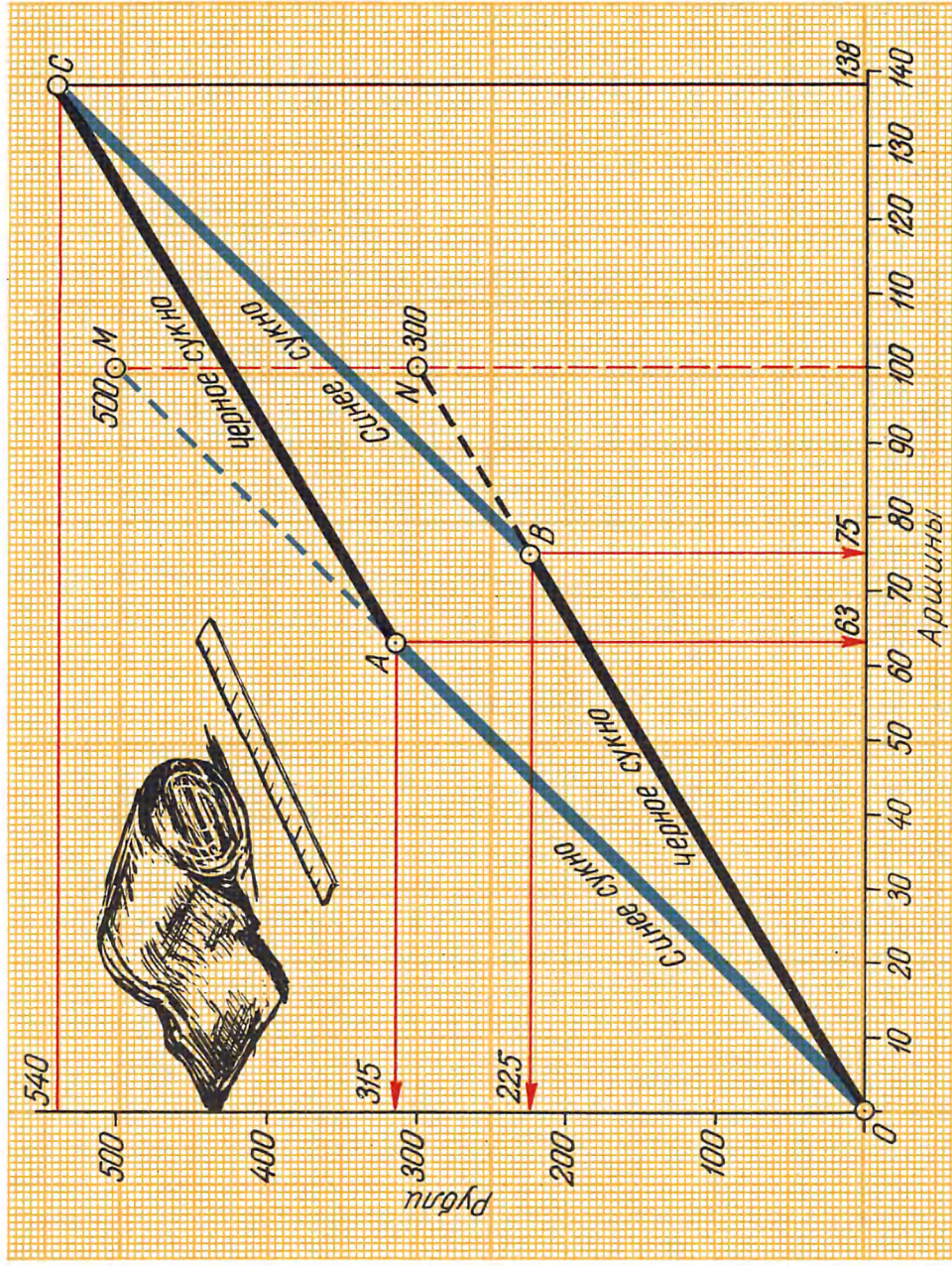


Рис. 64.

черного сукна. Так как точка C (138 аршин, 540 руб.) оказывается между лучами OM и ON , то, следовательно, купили и синее, и черное сукно. Проведем $CA \parallel NO$ до пересечения с OM , получим точку A . Ломаная OAC — график нарастающей стоимости сукон — синего (OA) и черного (AC). Проекция точки A на оси OX и OY указывают, что синего сукна купили 63 аршина на 315 руб. Задача решена; найти количество и стоимость черного сукна теперь уже легко.

Можно поступить и немного иначе: провести $CB \parallel MO$; тогда ломаная OBC — график нарастающей стоимости сукон — черного (OB) и синего (BC). Проекция точки B на оси OX и OY показывают, что черного сукна купили 75 аршин на 225 руб.

Проверка: $63 + 75 = 138$ (аршин) и $315 + 225 = 540$ (руб.).

СНОВА ТРИ СПЛАВА

Имеются два сплава серебра и золота; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором серебро и золото были бы в отношении 5:11?

Решение

Аналогичная задача была решена при помощи диаграммы в главе II (см. стр. 44); на этот раз мы решим задачу при помощи ломаных графиков.

По условию, отношение количества серебра к количеству золота в I сплаве равно 2:3; иными словами, содержание серебра в I сплаве — 2:5 всего сплава. Содержание серебра во II сплаве — 3:10, наконец, в III сплаве — 5:16 всего сплава.

Изобразим графически содержание серебра в каждом из сплавов (рис. 65а). Пусть абсциссы — вес сплава (в кг), а ординаты — вес серебра в данном количестве сплава (также в кг).

По условию, в I сплаве серебро составляет 2:5 всего сплава, т. е., например, в каждых 5 кг сплава содержится 2 кг серебра. Отметим точку A с координатами 5 и 2 и построим прямую OA . Для любой точки этой прямой отношение ординаты к абсциссе равно 2:5. Следовательно, прямая OA является графическим изображением содержания серебра в I сплаве.

Аналогично, точка B с координатами 10 и 3, а также и любая точка прямой OB указывает содержание серебра во II сплаве.

Наконец, точка C (16; 5) и все точки прямой OC указывают содержание серебра в III сплаве.

Так как луч OC оказался между лучами OA и OB , то из двух данных сплавов можно составить заданный сплав. В задаче требуется ответить на вопрос: «сколько килограммов I и II сплава нужно взять для того, чтобы получить 8 кг III сплава?».

Точка D на луче OC с абсциссой 8 соответствует восьми килограммам III сплава. Проведем через точку D прямую DE , параллельную OA до пересечения с лучом OB в точке E .

Ломаная OED и является графиком нарастающего содержания серебра в III сплаве. Так как отрезок DE параллелен прямой AO , то его проекция на горизонтальную ось указывает долю I сплава (1 кг) в составе III сплава. Проекция отрезка OE на ту же ось указывает долю II сплава (7 кг) в составе III сплава. Семь килограммов II сплава и один килограмм I сплава образуют искомый сплав с заданным содержанием серебра. Об этом свидетельствует тот факт, что точка D ломаного графика OED находится на прямой OC , характеризующей заданное содержание серебра в III сплаве.

При решении этой задачи обнаружилось одно слабое место графического решения: так как угол между прямыми OA и OB мал, то, проведя через точку D прямую, параллельную прямой OA , мы не можем достаточно точно выявить точку E . Чтобы преодолеть это затруднение и повысить точность результата, выделим ту часть графика, где сосредоточены основные данные. Для этого рассуждаем так:

содержание серебра	в I сплаве	2: 5 = 32:80,
»	» во II	» 3:10 = 24:80,
»	в III	» 5:16 = 25:80.

Меньше всего серебра во II сплаве (24 доли из каждых 80); поэтому за начало отсчета числа долей серебра в сплавах можно принять именно число 24 (рис. 65б).

Для построения графиков, изображающих содержание серебра в сплавах I, II и III, заметим, что тангенсы углов наклона графиков к оси OX должны относиться как числа, показывающие превышение числа долей серебра в данном сплаве над числом 24. В таком случае графиком «сплав II» будет сама ось OX .

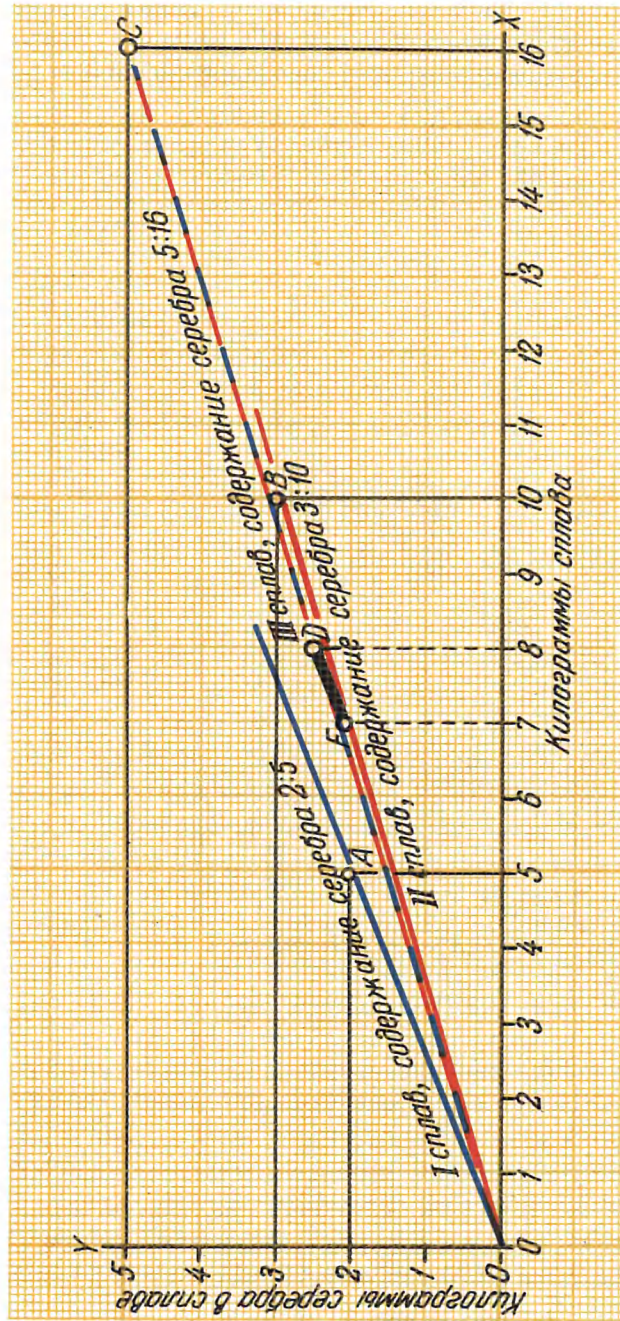


Рис. 65а.

Y

Число восьмидесятых долей серебра в сплаве

32
31
30
29
28
27
26
25
24

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Килограммы

I сплав, содержание серебра $2:5 = 32:80$

II сплав, содержание серебра $1:1 = 25:25$

III сплав, содержание серебра $5:16 = 25:80$

Г D

Н В

Е

Ф

Рис. 656.

Условие задачи изображено; приступаем к ее решению.

— 126

что II сплава нужно взять 7 кг. Через ту же точку E проводим $EG \parallel OX$ до пересечения с лучом OA в точке G и проектируем точку G на ось OX ; точка H показывает, что I сплава нужно взять 1 кг.

Упражнение. В каком случае «график сплава» изображается прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью OX угол, равный 45° ?

Может ли график сплава образовать с осью OX угол, больший 45° ? (В обоих случаях масштабы для координатных осей одинаковы.)

ОРЕХИ

Смесь орехов из 9 кг первого сорта, 11 кг второго и 7 кг третьего сорта стоит 346 руб. Сколько стоит 1 кг каждого сорта, если 1 кг первого сорта на 4 руб. дороже килограмма второго сорта и на 6 руб. дороже килограмма третьего сорта?

(А. А., № 59)

Решение

На оси OX (рис. 66) откладываем последовательно вес орехов каждого из трех сортов (всего $7 + 11 + 9 = 27$ кг), а на оси OY — стоимость (полная стоимость — 346 руб.).

Сделаем сначала заведомо неправильное предположение — пусть стоимость 1 кг орехов III сорта равна... нулю. Тогда стоимость 1 кг орехов I сорта равна 6 руб., а стоимость 1 кг орехов II сорта равна $6 - 4 = 2$ (руб.). Эти данные можно отметить соответствующими точками на чертеже, но при выбранном масштабе точки окажутся очень близкими к началу координат, поэтому для повышения точности чертежа отметим точками F и E соответственно стоимость 10 кг орехов I и II сорта (60 и 20 руб.). Проведем лучи OF и OE и построим отрезки $AB \parallel OE$ и $BC \parallel OF$. Тогда ломаная $OABC$ — график нарастающей стоимости всех орехов при сделанном предположении. Получившийся отрезок DC указывает величину стоимости всей смеси — 76 руб.

Мы получили стоимость значительно ниже той стоимости, которая указана в условии. Это произошло потому, что мы произвольно уменьшили стоимость килограмма орехов каждого сорта — первого, второго и третьего на величину стоимости одного килограмма орехов III сорта. Вследствие этого получилось уменьшение полной стоимости всех 27 кг орехов на величину, соответствующую отрезку CK , где точка K имеет координаты (27; 346).

Отложим $KL=CD$ и соединим прямолинейным отрезком точки O и L . Тогда $DL=CK$; следовательно, OL — график действительной стоимости орехов III сорта. По этому графику устанавливаем, что 1 кг орехов III сорта стоит 10 руб.

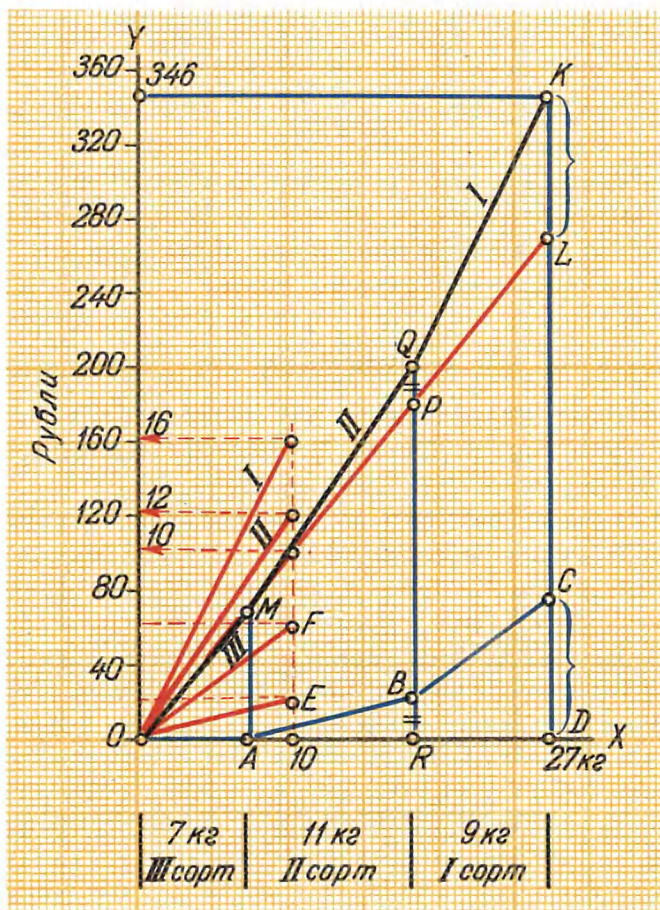


Рис. 66.

Отсюда, 1 кг II сорта стоит $10 + 2 = 12$ руб., а 1 кг I сорта стоит $10 + 6 = 16$ руб.

Ответ на задачу получен, но для полного завершения графического решения закончим построение действительного графика нарастающей стоимости орехов трех сортов.

Так как орехов III сорта было 7 кг (точка *М*), то первым звеном полного графика нарастающей стоимости орехов должен быть не отрезок *ОА*, а отрезок *ОМ*. Отложим отрезок *PQ=RB* и соединим точку *Q* с точками *М* и *К*. Ломаная *ОМQК* (черная) — действительный график нарастающей стоимости орехов трех сортов. Проведя через точку *О* лучи параллельно отрезкам *МQ* и *QК*, получим действительную стоимость орехов I и II сортов. Читаем на шкале оси *ОУ* эту стоимость для 10 кг: 100 руб. для III сорта, 120 руб. для II сорта и 160 руб. для I сорта. Отсюда стоимость 1 кг орехов III, II и I сортов: 10 руб., 12 руб. и 16 руб.

ЧАН

В чан емкостью 12 м^3 по трубе № 1 поступает в час 3 м^3 воды, а по трубе № 2 — 1 м^3 . Из чана по трубе № 3 выливается в час 2 м^3 воды.

Трубы действуют по следующему расписанию:

Труба	Открыта	Закрита
№ 1	в 0 час.	в 3 час.
» 2	в 1 час.	в 19 час.
» 3	в 6 час.	в 19 час.

Сколько воды будет в чане в 19 час.?

Решение

Велик соблазн решить задачу так:

труба № 1 была открыта в течение трех часов; следовательно, по этой трубе поступило $3 \times 3 = 9 (\text{м}^3)$;

труба № 2 была открыта в течение 18 часов и по ней поступило $18 \times 1 = 18 (\text{м}^3)$ воды;

наконец, труба № 3 работала 13 часов, по ней вылилось $13 \times 2 = 26 (\text{м}^3)$ воды.

Таким образом, в конце концов, в чане оказалось $9 + 18 - 26 = 1 (\text{м}^3)$ воды.

Но для данной задачи это неверно! График на рис. 67 покажет истинную картину.

Через 4 часа чан был наполнен и после этого вся поступавшая вода в течение двух часов просто переливалась через край

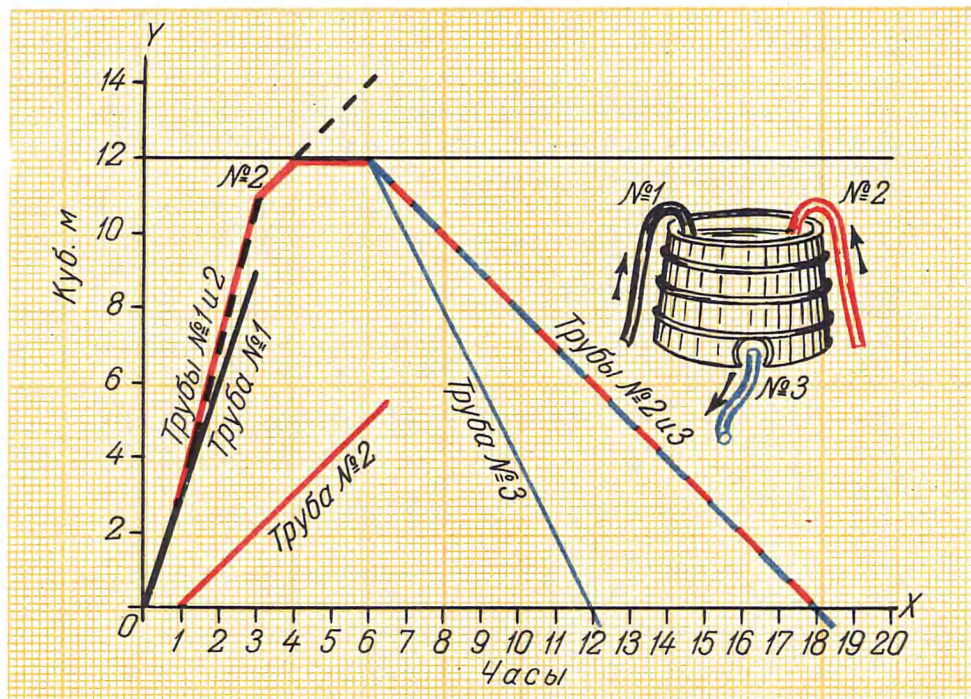


Рис. 67.

чана. Лишь после того, как в 6 час. открыли трубу № 3, количество воды в чане стало уменьшаться и дошло до нуля в 18 часов. Далее, вся поступавшая по трубе № 2 вода тотчас выливалась по трубе № 3, работавшей неполным сечением.

БАСЕЙН

Труба № 1 наполняет бассейн за 1 час; труба № 2 наполняет тот же бассейн за 1,5 часа; содержимое бассейна выливается за 2,5 часа по трубе № 3.

Требуется определить продолжительность наполнения бассейна для следующих четырех случаев:

- | | | |
|----|----------------------------|-------------|
| 1) | одновременно открыты трубы | № 1 и 2, |
| 2) | » | № 1 и 3, |
| 3) | » | № 1, 2 и 3, |
| 4) | » | № 2 и 3. |

Решение

Строим прямоугольную систему координат (рис. 68): по оси абсцисс отмечаем время; по оси ординат — объем воды в бассейне. На произвольном расстоянии OO' от оси абсцисс, соответствующем объему бассейна, проводим параллельно ей прямую $O'Q$.

Если будет открыта только труба № 1, то пустой бассейн наполнится за 1 час. Так как наполнение бассейна происходит равномерно, то луч OB является графиком действия трубы № 1 (наполнение бассейна). Аналогично, луч OC — график действия трубы № 2 (наполнение бассейна). Наконец, строим луч $O'D$ — график действия трубы № 3 (опорожнение бассейна).

Построим теперь графики для случаев, о которых говорится в задаче, когда одновременно открыты две или три трубы.

1) График одновременной работы труб № 1 и 2.

За один час через трубу № 1 поступит объем воды, изображаемый отрезком AB ; за это же время по трубе № 2 поступит объем воды, изображаемый отрезком AE . Определим, какое количество воды за это же время могло бы поступить по трубам № 1 и 2 вместе.

Откладываем $BF = AE$, соединяем точку F с точкой O ; отрезок OG — график совместного действия труб № 1 и 2. Опустив из точки G перпендикуляр на ось OX , получим искомое время — 36 мин.

2) График одновременной работы труб № 1 и 3.

Сколько воды могло бы быть в бассейне через один час после открытия обеих труб? Если бы работала только труба № 1, то количество воды в бассейне соответствовало бы отрезку AB . Но при одновременной работе труб № 1 и 3 из этого количества воды следует отнять количество воды, соответствующее отрезку BM . Следовательно, в бассейне останется количество воды, изображаемое отрезком AM .

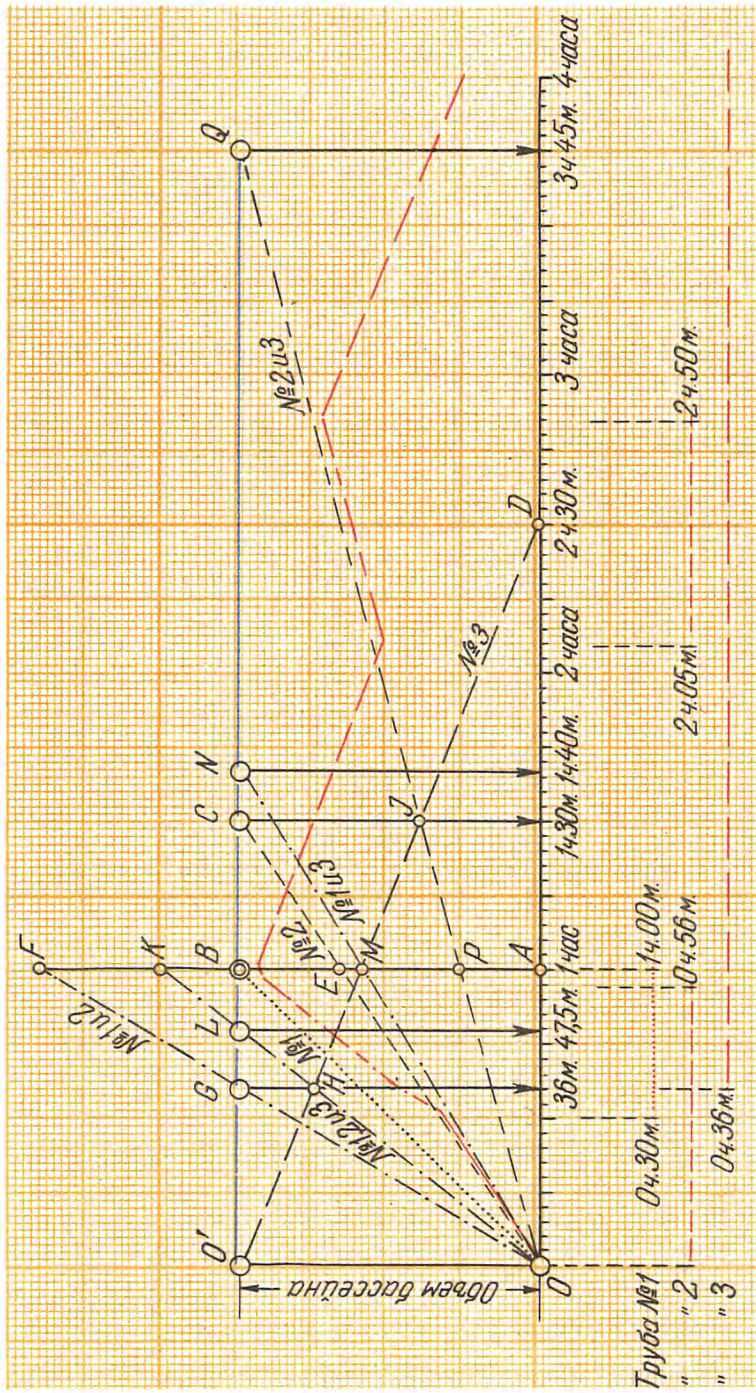


Рис. 68.

Соединив прямой точки O и M , получим искомый график — отрезок ON . Проекция точки N на ось OX указывает, что бассейн наполнится через 1 час. 40 мин.

3) График одновременной работы труб № 1, 2 и 3.

График одновременной работы труб № 1 и 2 построен ранее — это отрезок OG . Аналогично предыдущему, вычитаем отрезок GH и получаем искомый график — отрезок OL ; время наполнения бассейна — 47,5 мин.

Можно было поступить иначе: график совместного действия труб № 1 и 3 (отрезок ON) сложить с графиком действия трубы № 2 (отрезок OE), т. е. построить $AM + AE = AK$. Точку K искомого графика можно получить еще иначе: отложить $FK = BM$.

Из этих трех приемов построения первый — проще.

4) График одновременной работы труб № 2 и 3.

Его легко построить при помощи точки J (J — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки C на ось OX , с прямой $O'D$). Время наполнения указывает точка Q — 3 час. 45 мин.

Таким образом, мы располагаем графиками работ на все возможные семь случаев (три случая, когда открыта одна из труб; три случая, когда открыты две трубы; наконец, один случай, когда открыты все три трубы одновременно).

Теперь нетрудно построить график количества воды в бассейне для любой комбинации продолжительностей действия труб. Пусть, например, дело обстоит так:

Сначала бассейн был пустым; а затем

в 0 час. 00 мин. открыли трубу № 2,

в 0 час. 30 мин. открыли трубу № 1,

в 0 час. 36 мин. открыли трубу № 3,

в 0 час. 56 мин. закрыли трубу № 2,

в 1 час. 00 мин. закрыли трубу № 1,

в 2 час. 05 мин. открыли трубу № 2,

в 2 час. 50 мин. закрыли трубу № 2.

Эти данные отмечены внизу рисунка (красные прямые).

Строя звенья ломаной параллельно ранее построенным прямым, получаем искомый график (на чертеже красная ломаная) количества воды в бассейне для промежутка времени 0 час. — 4 час.

Во избежание накопления ошибок этот график надо чертить очень тщательно.

АВТОБУСЫ

Из туристской базы *A* в 10 час. должны были выехать четыре автобуса и доставить 80 туристов на станцию *B*, откуда в 12 час. 00 мин. отходил поезд. Расстояние $AB = 50$ км, скорость автобуса 40 км/час. Следовательно, автобусы будут в пути 50:40 часа и прибудут на станцию *B* в 11 час. 15 мин.; таким образом, туристы еще успеют там пообедать. Однако в назначенное время на базу прибыло не четыре, а только три автобуса. Можно ли в этих условиях организовать доставку всех туристов с базы на станцию до отхода поезда так, чтобы они все прибыли одновременно, если в каждом автобусе только по 20 мест?¹⁾

Совершенно очевидно, что ни один автобус не успеет за 2 часа сделать два рейса из *A* в *B*: с другой стороны, пройти пешком 50 км за 2 часа невозможно (часть пути туристы все-таки должны пройти пешком, скажем, со скоростью 6 км/час).

Нельзя рассчитывать на увеличение скорости (40 км/час) автобуса, но можно пренебречь временем, затрачиваемым на посадку и высадку из автобуса и т. д.

Решение

Надежда на существование решения поставленной задачи у нас есть. В самом деле, в обычных условиях рейс автобуса из *A* в *B* продолжается 1 час. 15 мин., а в распоряжении туристов имеется 2 часа. Приступим поэтому к разработке плана действий и привлечем на помощь графики. Задачу можно считать решенной только в том случае, если план действий окажется практически осуществимым.

Разобьем всех туристов на четыре одинаковые группы по 20 человек. Ровно в 10 час. отправим из пункта *A* три группы туристов на трех автобусах, а четвертой группе предложим отправиться пешком. Через некоторое время к этой группе туристов должен

¹⁾ Условие этой задачи — не выдумка. Осенью 1954 г. на строительстве одной из крупных гидроэлектростанций состоялась техническая конференция. По окончании конференции часть делегатов на четырех автобусах направилась к железнодорожной станции. Проехать надо было 100 км. В пути передний автобус неожиданно остановился и шофер, подняв капот, начал искать причину остановки мотора. Тогда-то и возникла необходимость решения подобной задачи.

будет вернуться один из автобусов (например, автобус № 1) и отвезти их на станцию.

Зная скорость автобуса (40 км/час) и скорость пешеходов (6 км/час), строим лучи OJ и OD (рис. 69). Возможный график движения четвертой группы туристов это — ломаная ODF , причем положение точки D пока неизвестно, но $DF \parallel AJ$ и точка F — где-то вблизи отметки 12 час. (левее ее). Чтобы отвезти на станцию четвертую группу туристов в соответствии с графиком DF , автобус № 1 должен где-то в пути высадить своих пассажиров (первую группу туристов) и повернуть обратно в сторону A . Намечаем возможный график для этой части маршрута автобуса № 1 (отрезок CD). Полный график движения автобуса № 1 — ломаная $OCDF$.

В свою очередь, высаженная первая группа туристов должна без промедления отправиться пешком по направлению к станции. Намечаем возможный график дальнейшего передвижения первой группы туристов: ломаная CEF , где $CE \parallel AD$. Так мы обеспечим одновременное прибытие на станцию уже двух групп туристов: четвертой и первой.

Для того чтобы отвезти на станцию первую группу туристов в соответствии с графиком EF , автобус № 2 должен тоже где-то в пути высадить своих пассажиров (вторую группу туристов) и повернуть обратно в сторону A до встречи с группой № 1 (отрезок $GE \parallel CD$). Полный график движения автобуса № 2 — ломаная $OGEF$.

Высаженная из автобуса вторая группа туристов идет пешком, а в дальнейшем едет на автобусе № 3.

В последнюю очередь высаживается третья группа туристов из автобуса № 3, и пока этот автобус идет по графику KHF , третья группа доходит пешком до станции B (отрезок $KF \parallel AD$).

Проект готов, но, чтобы все именно так произошло, надо правильно определить положение точки D . Точку D можно найти чисто графически — построением. Это мы оставляем читателю для самостоятельного выполнения¹⁾. Но по намеченному графическому

¹⁾ Здесь целесообразно использовать *метод подобия* — выбрать сначала точку D' произвольно на луче AD , провести через нее луч $D'F' \parallel AJ$ и построить ломаную $D'C'E'G'H'K'F'$, подобную ломаной $DCEGHKF$ (следует учесть, что скорость автобуса в прямом и в обратном направлении одинакова!). Но точка F не попадет на верхний край чертежа. Остается построить фигуру, подобную полученной, чтобы точка F попала на этот край. Это уже несложно.

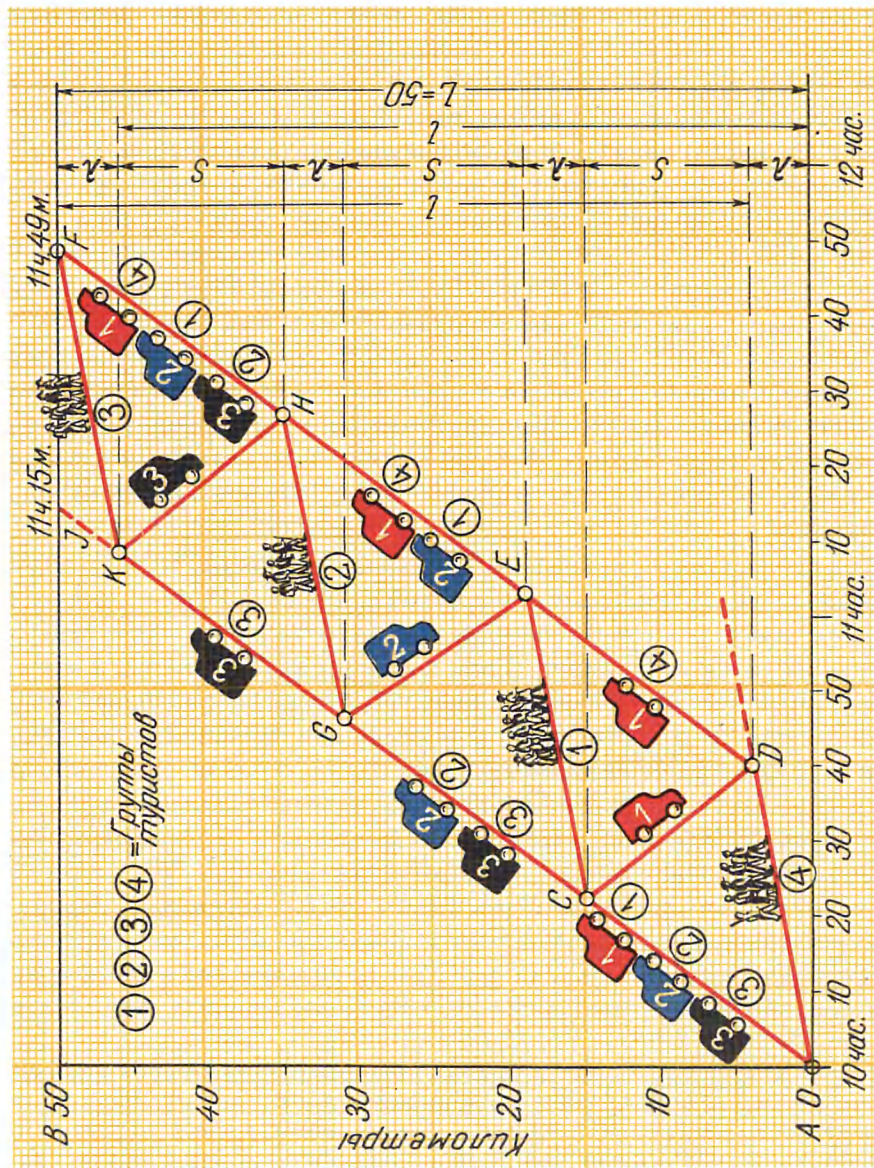


Рис. 69.

проекту не очень трудно осуществить и все вычисления, необходимые для уточнения плана.

Как показывает предварительный проект, для того чтобы все 80 туристов прибыли на станцию одновременно и, конечно, не ровно в 12 час., а несколько раньше, каждая группа туристов должна проехать на автобусе одно и то же расстояние, положим l км, и пройти пешком одно и то же расстояние, равное $\lambda = (50 - l)$ км.

Полное время, которое каждая группа будет в пути, равно

$$T_1 = \frac{l}{40} + \frac{50 - l}{6} = \frac{25}{3} - \frac{17}{120} l \text{ (час.)}.$$

Определим, сколько часов будет в пути каждый автобус, движущийся со скоростью 40 км/час. Обозначим это время через T_2 .

Путь, пройденный каждым автобусом, таков: от A до B (50 км) плюс дважды взятое расстояние, пройденное в обратном направлении (в направлении от B к A), которое обозначим через s .

Из чертежа видно, что

$$s = \frac{l - 4\lambda}{3} = \frac{50 - 4(50 - l)}{3} = \frac{4l}{3} - 50 \text{ (км)}.$$

В таком случае

$$T_2 = \frac{l + 2s}{40} = \frac{50 + \frac{8}{3}l - 100}{40} = \frac{\frac{8}{3}l - 50}{40} = \frac{l}{15} - \frac{5}{4} \text{ (час.)}.$$

Но $T_1 = T_2$; следовательно:

$$\frac{25}{3} - \frac{17}{120} l = \frac{1}{15} l - \frac{5}{4},$$

откуда получаем, что расстояние, которое проедет каждый турист в автобусе, равно

$$l = 46 \text{ км}.$$

Расстояние, которое пройдет пешком каждый турист, равно

$$\lambda = L - l = 50 - 46 = 4 \text{ км}.$$

Значит, время, затраченное на весь путь,

$$T = \frac{46}{40} + \frac{4}{6} = 1 \frac{49}{60} \text{ (час.)}.$$

Следовательно, первый автобус высаживает своих пассажиров, пройдя $\frac{1}{3} \cdot 46$ км, второй — пройдя $\frac{2}{3} \cdot 46$ км, третий — пройдя 46 км. Все туристы придут на станцию через $1 \frac{49}{60}$ часа, т. е. в 11 час. 49 мин. Такой план, вообще говоря, практически осуществим. Туристы успеют к поезду, но пообедать на станции им уже не придется.

Упражнения 1. Не напрасно ли мы заставили всех туристов пройти часть пути (4 км) пешком? Можно ли организовать переброску 80 туристов так, чтобы ни одному из них не пришлось идти пешком? Если нельзя избавить от этого всех, то можно ли доставить на станцию *В* в автобусе хотя бы 20 пожилых людей, но так, чтобы и все остальные прибыли в *В* не позже 11 час. 59 мин.

2. Составьте график перевозки, если туристов 100, но вместо пяти автобусов пришло только три.

3. Зная, в какой последовательности происходит движение автобусов — перемещение пассажиров, — постройте (найдите) точки *С*, *Д*, *Е*, *Г*... в первой задаче — чисто графически (см. сноску на стр. 135).

УПРАЖНЕНИЯ

ДВА НАСОСА. Два насоса, работая совместно, могут наполнить водоем за 10 часов. После четырехчасовой совместной работы первый насос был остановлен, а второй наполнил оставшуюся часть водоема за 18 часов. За сколько часов каждый из насосов, работая один, мог бы наполнить водоем?

(П. С., № 546)

НАБОРЩИКИ. Задачу «Наборщики» (см. стр. 40) решите вновь, применяя ломаные графики.

БАССЕЙН. В бассейн вместительностью 2283 ведра проведены две трубы. За час через первую трубу в бассейн втекает $480 \frac{2}{3}$ ведра воды, а через вторую — $360 \frac{1}{3}$ ведра. На сколько часов следует открыть каждую трубу, чтобы они, действуя одна после другой, могли наполнить бассейн за 5 час.?

(П. С., № 543.1)

ТРИ КРАНА. В сосуде имеется три крана. Через первый и второй краны вода вливается, через третий — выливается. Один первый кран может наполнить сосуд за 10 час., а один второй — за 15 час. При совместном действии всех трех кранов из полного сосуда выливается вся вода за 30 час. Сосуд был полон, когда открыли первый и третий краны. Через 1 час после их открытия первый кран был закрыт, но открыт второй, а еще через 1 час закрыли и третий кран и вновь от-

крыли первый. Через сколько часов после закрытия третьего крана два первых крана наполнят сосуд?

(М., № 293)

ЧЕТЫРЕ КРАНА. В резервуаре, наполненном водой, открыли четыре крана. Через 2 часа, когда вылилась четвертая часть имевшейся в нем воды, первый кран был закрыт. Через 4 часа после этого, когда вылилась еще одна четвертая часть всей воды, был закрыт второй кран. Через 6 час. после этого, когда было вылито $\frac{3}{4}$ всей воды, был закрыт третий кран. После этого через 10 часов из резервуара вылилась вся вода. Во сколько часов выльется из резервуара вся вода, если будет все время открыт один первый кран, один второй, один третий, один четвертый?

(М., № 291)

СПИРТ И ВОДА. Одна бочка содержит 12 ведер спирта и 20 ведер воды, другая — 9 ведер спирта и 4 ведра воды. Сколько ведер нужно перелить из первой бочки во вторую, чтобы получить в ней смесь, содержащую спирт и воду поровну (по объему)?

(М., № 292)



Глава шестая

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ К ГРАФИКАМ

В этой заключительной главе рассмотрим несколько задач, графическое решение которых сопровождается некоторыми дополнительными построениями.

ДВА СОСУДА

Эта задача была решена в гл. I. Там были рассмотрены два варианта ее решения с помощью диаграмм. Здесь мы предлагаем третий вариант решения, теперь уже с помощью графиков и несложных построений, дополняющих графики. Повторим условие задачи.

В каждом сосуде имеется по 540 л воды. Из первого вытекает каждую минуту 25 л, из второго — 15 л. Через сколько минут во втором сосуде останется в 6 раз больше воды, чем в первом?

Решение

На миллиметровой бумаге построим оси координат (рис. 70) и будем на оси OY откладывать количество воды в сосуде ($1 \text{ мм} = 10 \text{ л}$), а на оси OX — время ($2,5 \text{ мм} = 1 \text{ мин.}$). Зная первоначальное количество воды в сосудах (по 540 л) и скорости истечения (25 и 15 л/мин), построим графики зависимости количеств воды в каждом сосуде от времени: луч AB для первого сосуда и луч AC для второго сосуда.

Отложим $DE = \frac{1}{5} CD$ и соединим прямолинейным отрезком точки A и E .

Полученная точка K и дает ответ: 20 мин.

В самом деле, любая вертикаль MN , пересекающая лучи AC , AD и AE , делится ими на два отрезка PQ и QR , отношение длин которых равно 5:1; следовательно, для точки K имеем $\frac{y_2}{y_1} = \frac{6}{1} = 6$.

Таков геометрический способ решения данной задачи. Если мы не располагаем миллиметровкой, то этот же чертеж, сделанный от руки, дает нам возможность вычислить ответ следующим образом:

$$\begin{aligned} FD &= 25 \times 36 = 900 \text{ (н)}, \\ CD &= 900 - 540 = 360 \text{ (н)}, \\ DE &= \frac{1}{5} \times 360 = 72 \text{ (н)}, \\ FE &= 900 + 72 = 972 \text{ (н)}, \\ OK &= \frac{540}{972} \times 36 = 20 \text{ (мин.)}. \end{aligned}$$

САМОЛЕТ И ВЕТЕР

Ежедневный рейс самолета: из пункта A в пункт B и обратно без задержки и без посадки в пункте B . Расстояние между пунктами A и B — 1 км. Собственная скорость самолета на всем пути постоянна и равна v км/час. Вчера была безветренная погода, полный штиль, а сегодня весь день дует ветер по направлению из A в B тоже с постоянной скоростью w км/час.

Ясно, что сегодня самолет потратит на рейс из A в B меньше времени, чем вчера, а на обратный рейс из B до A больше времени, чем вчера. Спрашивается, затратит ли он на всю дорогу — туда и обратно — сегодня столько же времени, сколько вчера, или нет?

Второй вопрос: если завтра весь день будет дуть ветер в противоположном направлении (из B в A) с той же скоростью w км/час, то изменится ли время, затрачиваемое самолетом на полный рейс?

Решение

С первого взгляда кажется, что самолет потратит одинаковое время на весь рейс и вчера, и сегодня: при движении по ветру самолет выигрывает некоторое количество времени, а возвращаясь

обратно против ветра теряет такое же количество времени, так что в сумме затрачивает столько же времени, сколько и при безветрии.

Это представление ошибочно

В самом деле, вообразим, например, что скорость ветра равна скорости самолета, и посмотрим, будет ли в этом случае выигрыш во времени при полете по ветру равен проигрышу во времени при полете против ветра. В этом случае на рейс из A в B самолет затратит ровно половину того количества времени, которое ему нужно на этот путь при безветрии, следовательно, такой же промежуток времени он и выиграет. А сколько времени потребуется ему на обратный путь? Увы, если скорость ветра равна собственной скорости самолета, то скорость движения самолета против ветра равна нулю! В этом случае самолет не прилетит обратно никогда.

Правильный ответ на задачу таков: проигрыш во времени при полете против ветра всегда больше выигрыша во времени при полете по ветру; следовательно, сегодня самолет совершает свой рейс дольше, чем вчера.

Обо всем этом наглядно и убедительно расскажут графики (рис. 71 и 72).

Если ветра нет, то график полного рейса самолета — ломаная AB_0A_0 , причем треугольник AB_0A_0 — равнобедренный (рис. 71). Пусть AC_1 — график движения ветра сегодня. Чтобы получить график движения самолета по ветру, надо все ординаты графика движения ветра (AC_1) прибавить к соответствующим ординатам графика AB_0 . Для этого достаточно отложить $B_0B_1 = A_1C_1$ и соединить прямой отрезком точки A и B_1 . Замечаем, что если при безветрии самолет из A в B летит t часов (отрезок AA_1 или BB_0), то по ветру он будет лететь из A в B не t часов, а меньше — на промежуток времени, изображаемый отрезком B_0B_0 .

Рассмотрим теперь обратный рейс. Если самолет летит из B в A при безветрии, то график его движения — некоторая прямая, параллельная отрезку B_0A_0 , если же — против ветра, то направление графика его движения определяется направлением отрезка $B_{11}A_0$, для получения которого достаточно отложить $B_0B_{11} = A_1C_1$ и соединить отрезком точки B_{11} и A_0 (этим осуществляется вычитание графика движения ветра из графика движения самолета). Так как

сегодня самолет повернул обратно из пункта B в момент времени, изображаемый точкой B'_0 , то для построения графика его возвра-

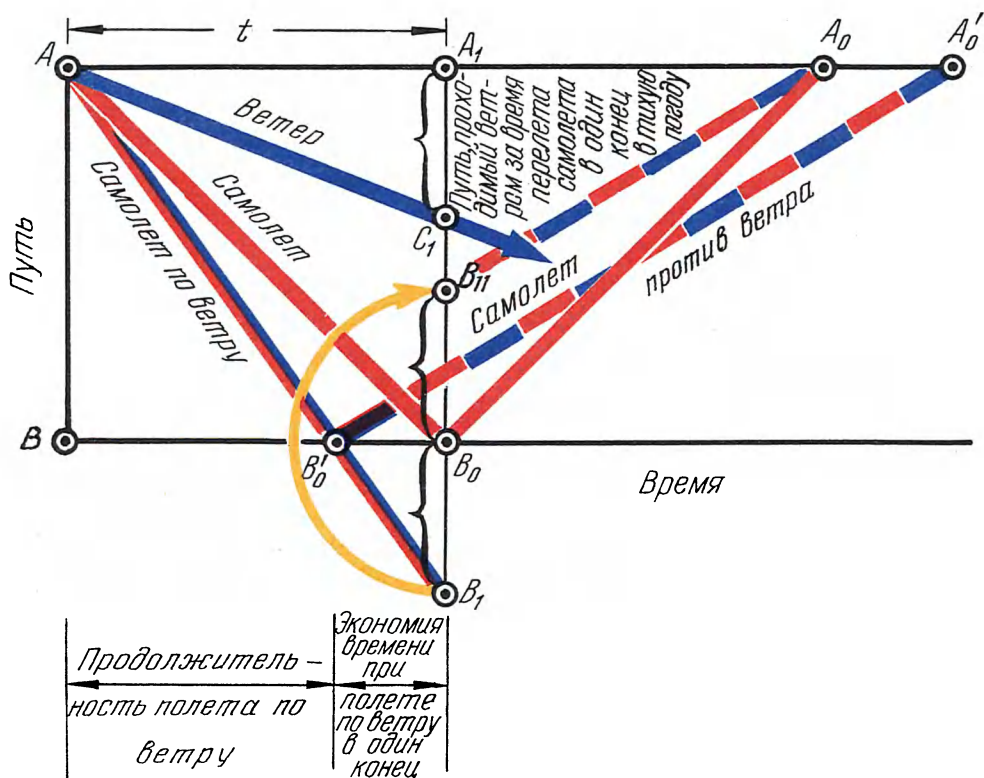


Рис. 71.

щения в A надо из точки B'_0 провести прямую $B'_0A'_0$, параллельную прямой $B_{11}A_0$. В пересечении с осью времени получим точку A'_0 , которая и укажет момент возвращения самолета в A .

Отрезок $A_0A'_0$ показывает общую потерю во времени в результате рейса в обоих направлениях, вызванную ветром, дующим в направлении из A в B .

Аналогичный график для рейса самолета на завтра — сначала против ветра, а потом по ветру (рис. 72) — показывает,

что и в этом случае общая потеря времени останется той же (отрезок A_0A_0'').

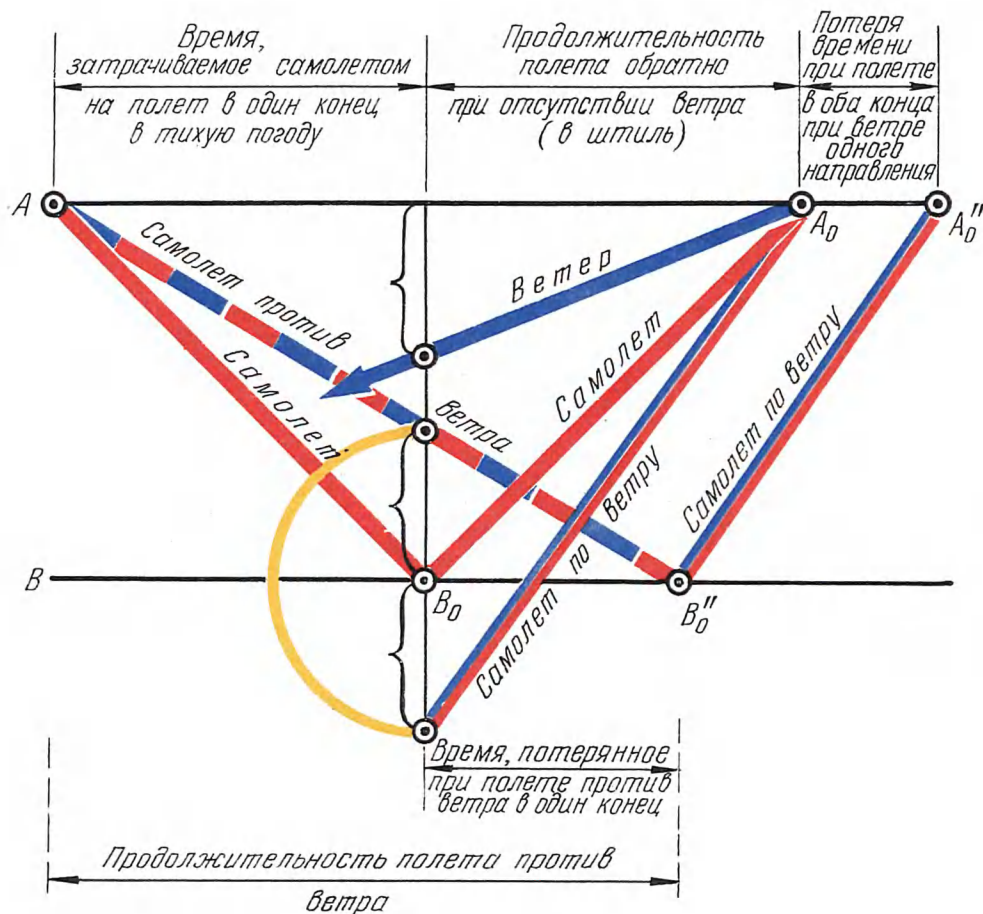


Рис. 72.

В обоих рассмотренных случаях рейс при ветре занимает больше времени, чем тот же рейс при безветрии. Причина в том, что полет против ветра длится дольше, чем по ветру; следовательно, встречный ветер воздействует на самолет длительнее, чем попутный ветер.

ДВА САМОЛЕТА И ВЕТЕР

Между пунктами A и B курсируют два самолета с неодинаковыми скоростями. Один раз они вылетели одновременно из этих пунктов навстречу друг другу в безветренную погоду и встретились через t часов, а когда в другой раз они вылетели одновременно из тех же пунктов и тоже навстречу друг другу, дул ветер в направлении от A к B с постоянной скоростью. Изменилось ли место встречи самолетов и время, прошедшее с момента вылета до встречи?

Решение

Пусть AC' и BC' (рис. 73) — графики движения самолетов в безветренную погоду. Точка C' определяет место и время их встречи.

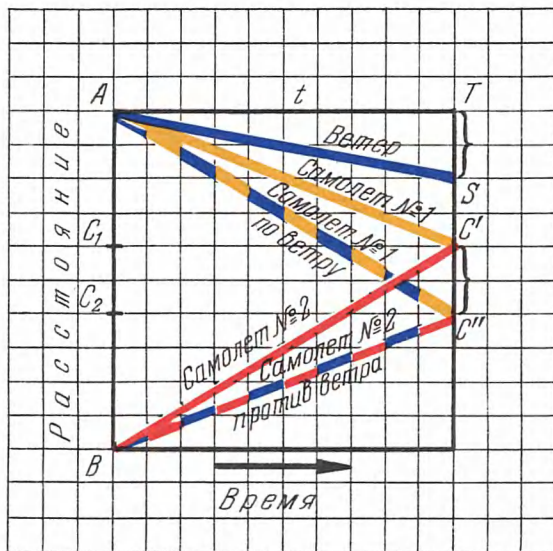


Рис. 73.

Пусть теперь дует ветер в направлении от A к B : за промежуток времени t ветер проходит расстояние, изображаемое отрезком TS .

Первый самолет за этот промежуток времени, испытывая воздействие попутного ветра, пройдет путь, изображаемый отрезком $TC'' = TC + CC''$, где $CC'' = TS$. График его движения — отрезок AC'' .

Второй самолет к моменту встречи с первым из-за встречного ветра пройдет расстояние меньше прежнего на ту же величину TS ; следовательно, графиком его движения будет отрезок BC'' .

Замечаем, что, несмотря на ветер, встреча самолетов произойдет в тот же момент, что и при безветрии; изменится лишь пункт встречи: он переместится в том направлении, куда дует ветер, и на такое расстояние, какое пройдет ветер за время полета самолетов.

Упражнения. 1. Подумайте: почему в том случае, когда один самолет летел от A до B и обратно, общая продолжительность полета зависела от скорости ветра, а в том случае, когда два самолета летели навстречу друг другу из тех же пунктов A и B , скорость ветра не оказывала никакого влияния на продолжительность полета до момента встречи?

2. Вчера первую половину пути от A до B самолет летел по ветру, а вторую половину пути — против ветра. Сегодня самолет опять летел от A до B , причем первую половину всего времени полета дул попутный ветер, а вторую половину времени — встречный ветер. В каком случае рейс продолжался дольше, если собственная скорость самолета во всех случаях постоянна и скорость ветра в обоих направлениях одна и та же?

ПЛОВЕЦ И ШЛЯПА

С моста, перекинутого через небольшую речку, спрыгнул спортсмен и поплыл против течения. Одновременно с головы одного из наблюдателей, стоявших на том же мосту, свалилась шляпа и поплыла по течению. Через 10 мин. пловец повернул назад, и, когда вновь подплыл к мосту, его попросили, не останавливаясь, плыть дальше и догнать шляпу. Пловец догнал шляпу как раз под вторым мостом, который находился на расстоянии 1000 м от первого моста. Скорость пловца неизвестна, но известно, что он своих усилий не изменял на протяжении всего времени движения. Располагая только указанными данными, определить скорость течения реки.

(Н., № 225)

Решение

Примем сначала (это только предположение!), что скорость течения равна нулю. Тогда ломаная OA_0B_0 (рис. 74) — график движения пловца туда и обратно (треугольник OA_0B_0 — равнобедренный), а прямая OKB_0 — график «движения» (т. е. покоя) шляпы ($OK = KB_0$).

фик движения пловца?

За 10 мин. его движения по реке вверх, т. е. против течения, течение снесет его вниз по направлению движения воды на величину

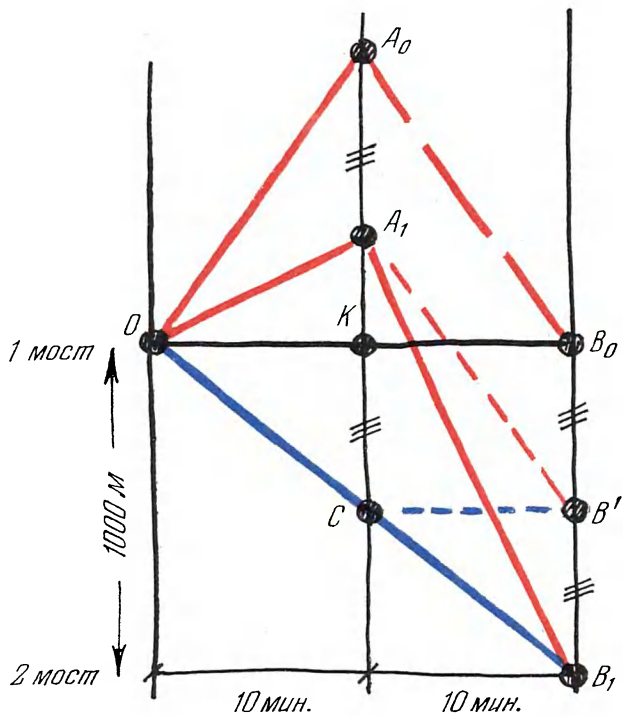


Рис. 74.

пути, проходимого течением за это время, т. е. на величину $KС$. Откладываем вниз от точки A_0 отрезок $A_0A_1 = KС$. Отрезок OA_1 — график движения пловца против течения.

Затем пловец поворачивает обратно. Если бы в этот момент течение прекратилось, то движение пловца в следующие 10 мин. изобразилось бы отрезком A_1B' , равным и параллельным отрезку A_0B_0 . Но течение есть, и поэтому графиком движения пловца по течению будет не отрезок A_1B' , а отрезок A_1B_1 , где $B'B_1 = KC$.

Итак, через $(10 + 10)$ мин. после начала про-

плыва пловец будет в пункте, соответствующем точке B_1 графика его движения. Но в этом же пункте окажется и шляпа! В самом деле, шляпа плывет равномерно со скоростью течения, и если за 10 мин. от начала движения она проделала путь, соответствующий отрезку KC , то ее путь за удвоенное время должен изображаться вдвое большим отрезком. Но как раз $B_0B_1 = 2KC$; следовательно, график движения шляпы (он же график течения) пересечется с графиком пловца в той же точке B_1 .

За 20 мин. шляпа проплыла расстояние между мостами, т. е. 1000 м. Следовательно, скорость течения равна $1000:20=50$ (м/мин).

Ход решения и результат совершенно не зависят от величины собственной скорости пловца, если, конечно, она не равна нулю.

У п р а ж н е н и е. Начертите график движения пловца для того случая, когда его скорость равна половине скорости течения.

ЭКСКУРСИЯ

Одна экскурсия выехала на линейках из города A и, проехав 11 час., достигла цели своего путешествия (города B). Затем экскурсия пошла обратно пешком, шла в течение 6 час. и встретила на расстоянии 80 км от города A вторую экскурсию, которая из города A до места встречи шла в течение 6 час. пешком и в течение 5 час. ехала на линейках. Какова была скорость передвижения на линейках, если скорость движения как пешком, так и на линейках в обоих случаях была одинакова?

(Б., № 2179)

Решение

Изобразим графически картину движения (рис. 75). Пусть AK — ось времени и AB — расстояние между городами A и B . На оси AK отметим точку M , изображающую 11 час., и перпендикулярно к AB проведем $BC = AM$, тогда прямая AC — график движения первой группы из A в B .

Вторая группа вышла из города A через $11 + 6 - (5 + 6) = 6$ час. после выхода первой группы (точка D).

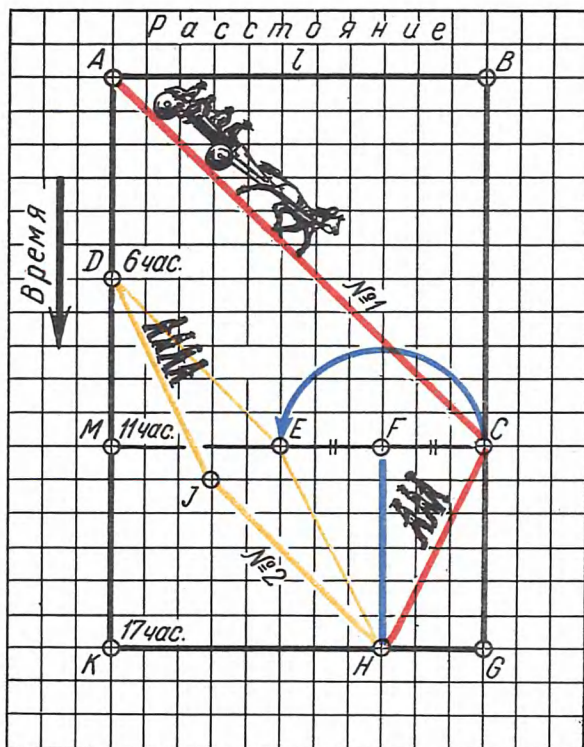


Рис. 75.

По условию, вторая группа сначала шла 6 час. пешком, а потом ехала 5 час. на линейках; дело не изменится, если мы предположим, что она сначала ехала 5 час. на линейках, а затем шла пешком 6 час.; поэтому на чертеже проводим $DE \parallel AC$ (E — на уровне точки M , причем отрезок DM изображает 5 час.).

Из пунктов, соответствующих точкам E и C , обе группы двинулись одновременно навстречу друг другу пешком (с одинаковой скоростью) и встретились через 6 час.; поэтому из центра F отрезка EC восстановим перпендикуляр FH до пересечения с GK в точке H (CG — 6 час.). Соединяем прямолинейными отрезками точку H с точками E и C и получаем график движения обеих групп. Так как в действительности вторая группа сперва шла пешком, а потом ехала на линейке, график ее движения — DJH , где отрезки DJ и JH дополняют ломаную DEH до параллелограмма $DEHJ$.

Из подобия треугольников AMC и DME следует, что $ME = \frac{5}{11} l$, где $l = AB$. Следовательно, $EC = \frac{6}{11} l$, откуда $EF = FC = \frac{EC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} l = \frac{3}{11} l$,
 $HH = MF = ME + EF = \left(\frac{5}{11} + \frac{3}{11} \right) l = \frac{8}{11} l = 80 \text{ (км)}$; откуда $l = 110 \text{ км}$.

Скорость линейки $v_1 = 110 : 11 = 10 \text{ (км/час)}$,
 скорость пешеходов $v_2 = 30 : 6 = 5 \text{ (км/час)}$.

МУХА

Из города O со скоростью 10 км/час выезжает верховой; навстречу ему из города L , находящегося от первого на расстоянии 90 км , одновременно выезжает со скоростью 20 км/час велосипедист. В момент выезда верхового, сидевшая на нем муха вылетает со скоростью 60 км/час навстречу велосипедисту; долетев до него, муха немедленно поворачивает обратно, долетает до верхового, вновь поворачивает и т. д. до момента встречи верхового и велосипедиста между собой. Сколько километров пролетит муха?

(К., № 38)

Поставим еще три дополнительных вопроса:

1) Сколько километров пролетит муха на пути «туда» и сколько — на пути «обратно»?

2) Сколько километров пролетит муха во время своего десятого рейса от верхового к велосипедисту?

3) Сколько километров пролетит муха до встречи верхового с велосипедистом, если всё время дует ветер со скоростью 15 км/час в направлении движения верхового, причем собственные скорости мухи, верхового и велосипедиста остаются такими же, как указано в условии задачи, а ветер влияет только на движение мухи?

Решение

Если вы попытаетесь сначала определить расстояние, которое пролетит муха до первой встречи с велосипедистом, затем то расстояние, которое она пролетит до возвращения к верховому, далее вновь расстояние до встречи с велосипедистом и т. д., то убедитесь, что такой путь решения задачи не только очень сложен, но и вообще выводит нас за рамки арифметических действий, поскольку путь мухи теоретически состоит из бесконечного множества все уменьшающихся длин ее перелетов.

Между тем «ларчик просто открывался». Муха летит всё то время, в течение которого верховой и велосипедист движутся навстречу друг другу, т. е. $90:(10+20)=3$ (часа), со скоростью 60 км/час . Таким образом, за все время муха пролетит $60 \cdot 3 = 180$ (км).

Так просто арифметически получается ответ на вопрос задачи!

Значительно труднее ответить на дополнительные вопросы. Но тут нам опять помогут графики!

Строим (рис. 76) графики движения верхового (OP), велосипедиста (LP) и мухи (красная ломаная $OABCD\dots$).

Отрезок OA изображает полет мухи из пункта O до встречи с велосипедистом. Отрезок AB изображает ее полет в обратном направлении — до возвращения к верховому (отрезки OA и AB одинаково наклонены к вертикали). Далее: $BC \parallel OA$, $CD \parallel AB$ и т. д.

Искомое расстояние, пройденное мухой, представляется суммой проекций отрезков ломаной $OABCD$ на вертикаль. Как же найти эту сумму проекций? Ведь их бесконечное множество!

С этой целью имеет смысл попытаться «выпрямить» ломаную $OABCD\dots$ без изменения суммы проекций ее звеньев.

Продолжим OA за точку A до встречи в точке Q с вертикалью, проходящей через точку P , соответствующую встрече верхового с велосипедистом. Через точки B , C , D ,... также проведем вертикали. Легко обосновать, что треугольник BAB' — равнобедренный, причем

$AB' = AB$. Фигура $BCC'B'$ — параллелограмм; следовательно, $B'C' = BC$. Фигура $DCC'D'$ — равнобедренная трапеция, у которой $C'D' = CD$ и т. д., причем во всех случаях имеем не только равенство отрезков, но и равенство их проекций на вертикаль.

Поэтому длина ломаной $OABCD...$ равна сумме длин $OA + AB' + B'C' + C'D' + ...$, т. е. равна длине отрезка OQ .

Проекция отрезка OQ на вертикаль — отрезок OQ' ; его длина, определенная по масштабу, равна 180 мм. Следовательно, муха пролетела 180 мм.

Этот же результат был получен нами арифметическим путем. Ответим на первый дополнительный вопрос.

Проведем прямую $PM \parallel BA$ до пересечения с прямой OQ в точке M . Найдем сумму тех отрезков ломаной $OABCD...$, которые соответствуют полету мухи в направлении от пункта O , т. е. найдем сумму отрезков $OA, BC, DE, ...$

Из геометрических соображений ясно, что $OA + BC + DE + ... = OM$ ¹⁾. Проектируя точку M на левую вертикаль, получим точку M' , которая, в соответствии с масштабом оси ординат, указывает число 105. Это и есть ответ на вопрос задачи: весь путь мухи в направлении от пункта O составляет 105 мм.

Впрочем можно получить этот результат и не пользуясь масштабом. В самом деле,

$$\begin{aligned} OP' &= 10 \cdot 3 = 30 \text{ (мм)}, \\ P'M' &= PM'' = M''Q = \frac{PQ}{2} = \frac{180 - 30}{2} = 75 \text{ (мм)}; \\ OM' &= OP' + P'M' = 30 + 75 = 105 \text{ (мм)}. \end{aligned}$$

Теперь ответим на второй вопрос.

Обозначим через q_1 отношение длины второго рейса в направлении OL к длине первого рейса в том же направлении. Это отношение проекций параллельных отрезков BC и OA на вертикальную ось равно, очевидно, отношению самих отрезков BC и OA графика полета мухи, т. е. $BC:OA = q_1$. Обозначим через q_2 отношение длины третьего рейса в направлении OL к длине второго рейса в том же направлении; рассуждая аналогично предыдущему, получаем: $DE:BC = q_2$.

¹⁾ Продолжаем отрезок CD за точку C до пересечения с OQ в точке S ; $AS = BC$. То же делаем и с другими отрезками графика движения мухи на пути «туда».

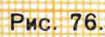


Рис. 76.

Обратим внимание на то, что два луча PL и PO , исходящие из точки P , пересечены системой параллельных прямых OA, BC, DE , отсекающих подобные треугольники; то же самое можно сказать и о другой системе параллельных прямых: AB, CD, \dots

Из подобия треугольников следует:

$$\begin{aligned}q_1 &= BC:OA = BP:OP = CP:AP, \\q_2 &= DE:BC = DP:BP = CP:AP.\end{aligned}$$

Итак, $q_1 = q_2$. Аналогично можно доказать, что $q_2 = q_3$, где q_3 — отношение длины четвертого рейса в направлении OL к длине третьего рейса в том же направлении и т. д. Следовательно, рейсы мухи в направлении OL составляют геометрическую прогрессию с первым членом OA' (длина первого рейса мухи) и знаменателем $q = BP:OP$ ¹⁾.

Найдем значения q и OA' :

$$OA'' = 90:(20 + 60) = \frac{9}{8} \text{ (час.)};$$

далее,

$$A''A = OL - (LA' + A''A'') = 90 - \frac{9}{8}(20 + 10) = \frac{225}{4} \text{ (км)};$$

$$A''B'' = \frac{225}{4}:(60 + 10) = \frac{45}{56} \text{ (час.)};$$

$$OB'' = OA'' + A''B'' = \frac{9}{8} + \frac{45}{56} = \frac{27}{14} \text{ (час.)};$$

$$B''P'' = 3 - \frac{27}{14} = \frac{15}{14} \text{ (час.)};$$

$$q = BP:OP = B''P'':OP'' = \frac{15}{14}:3 = \frac{5}{14};$$

$$OA' = 60 \cdot \frac{9}{8} = \frac{135}{2} \text{ (км)}.$$

Теперь, когда мы знаем первый член (OA') и знаменатель (q) геометрической прогрессии, нетрудно вычислить ее любой член, например десятый (a_{10}), по формуле $a_{10} = OA' \cdot q^9$. Это и будет ответ на второй вопрос задачи.

Найдем, наконец, ответ на последний вопрос (движение при наличии ветра)

Графики движения построим заново (рис. 77) в соответствии с дополнительным условием, что из O в сторону L дует ветер с постоянной скоростью 15 км/час .

¹⁾ Очевидно, что рейсы в обратном направлении (от L к O) также составляют геометрическую прогрессию. Каков ее знаменатель?

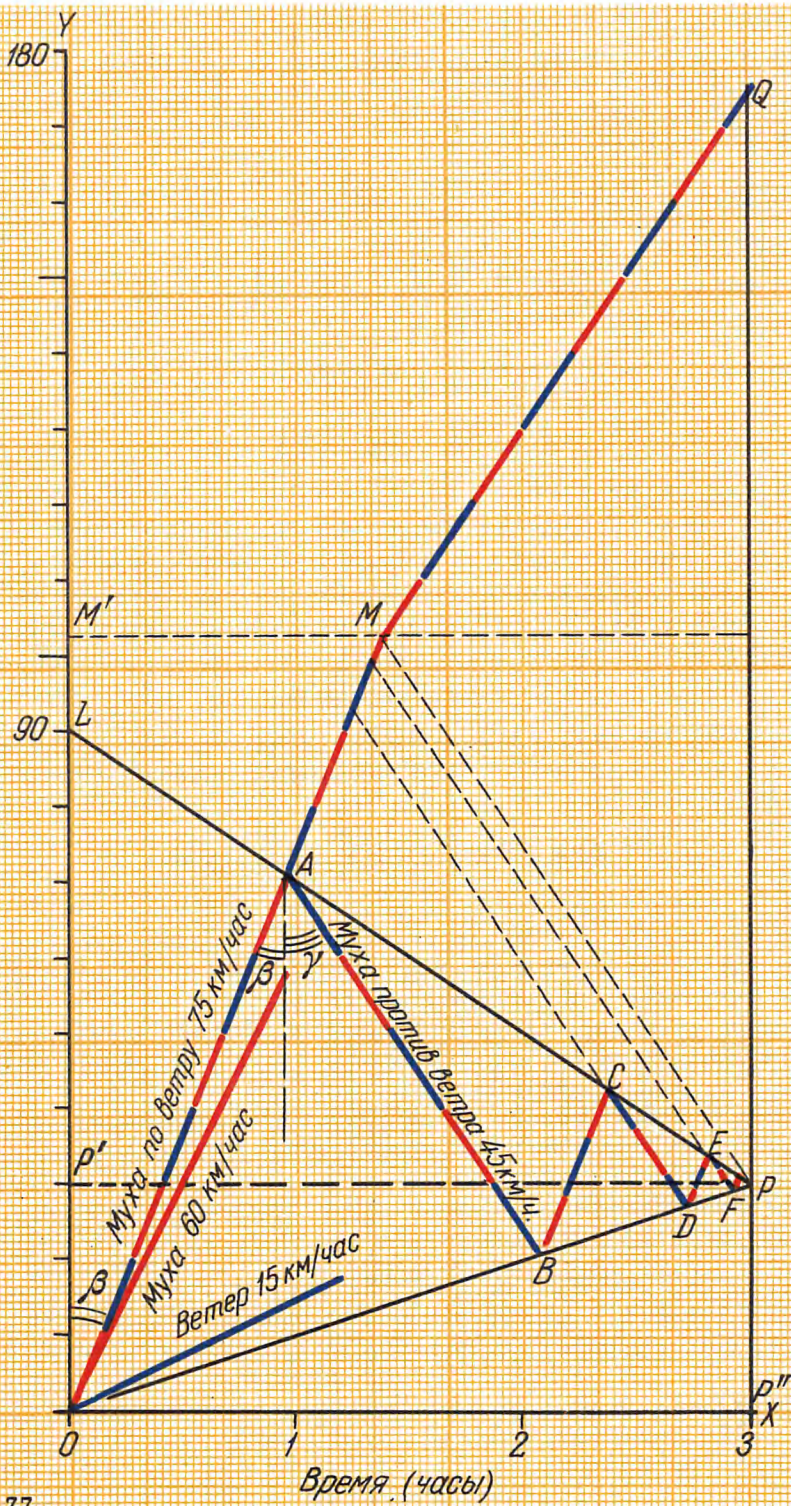


Рис. 77.

Муха в этом направлении летит теперь со скоростью $60 + 15 = 75$ км/час, а в противоположном — со скоростью $60 - 15 = 45$ км/час.

График полета мухи — новая ломаная $OAB CDEF...$, звенья которой составляют с вертикалью углы β и γ , причем $\beta \neq \gamma$, но по-прежнему $OA \parallel BC \parallel DE...$ и $AB \parallel CD \parallel EF...$

Если мы опять проведем прямую $PM \parallel BA$ до пересечения в точке M с продолжением луча OA , то

$$OM = OA + BC + DE + \dots$$

и

$$MP = AB + CD + EF + \dots$$

Проекция отрезка OM на ось OY укажет, следовательно, общую длину всех рейсов мухи по ветру, а проекция отрезка MP на ту же ось укажет общую длину всех рейсов мухи против ветра.

Общий путь мухи укажет проекция на ось OY отрезка $P'Q$, где точка Q симметрична точке P относительно горизонтали, проходящей через точку M .

Найдите сами это расстояние по масштабу на оси OY .

У п р а ж н е н и е. Сколько времени летала муха отдельно в каждом направлении при безветрии и при ветре? (Вспомните задачу «Самолет и ветер»).

ДВА ПРИЯТЕЛЯ И ЕЩЕ ОДИН

Начнем с простой задачи:

Два приятеля, живущие в разных местах, совершили в один и тот же день прогулку. Первый вышел в 10 час. 36 мин. из пункта A и пришел в 16 час. 21 мин. в пункт B . Второй вышел в 10 час. 30 мин. из пункта B и пришел в 15 час. 06 мин. в пункт A . В какое время они встретились?

(Первая республиканская математическая олимпиада Украины, М. в Ш., 1955 г., № 5)

Этот шаблонный вопрос о времени встречи, несомненно, теперь уже не вызовет затруднений у читателя, усвоившего разнообразные способы решения аналогичных задач.

Введем теперь в условие задачи третьего приятеля. Пусть он выходит из пункта A в 10 час. 00 мин. и приходит в пункт B

в 13 час. 30 мин. В таком случае можно поставить и более интересные вопросы, например:

1) Когда первый приятель находился на одинаковых расстояниях от двух других?

2) Когда третий приятель был вдвое ближе ко второму, чем к первому?

3) Какие пункты пути между A и B проходили приятели через равные промежутки времени друг после друга?

Решение

Пусть масштаб для горизонтальной оси времени (AA') $1\text{ мм} = 3\text{ мин.}$ (рис. 78).

По вертикали отложим произвольный отрезок AB (не интересуясь масштабом в этом направлении, так как расстояние AB не дано и не может быть найдено) и построим графики движения всех трех приятелей.

Теперь все подготовлено для получения ответов на вопросы задачи при помощи несложных дополнительных построений.

Первый вопрос: когда первый приятель находился на одинаковых расстояниях от двух других?

Один ответ на этот вопрос очевиден: *в момент встречи второго и третьего приятелей* первый будет на одном и том же расстоянии от каждого из них. Проведем вертикаль через точку C пересечения графиков движения второго и третьего приятелей до пересечения в точке N_1 с графиком движения первого. Проекция точки N_1 на горизонтальную ось и укажет один из искомых моментов времени.

Были ли еще моменты времени, когда первый приятель находился на одинаковых расстояниях от двух других?

Чтобы перевести этот вопрос на графический язык, проведем произвольную вертикаль, пересекающую все три графика. Пометим буквами N_1 , N_2 и N_3 точки пересечения вертикали с графиками движения соответственно: первого, второго и третьего приятелей.

Во сколько раз отрезок N_1N_2 больше отрезка N_1N_3 , во столько же раз в момент времени, соответствующий точкам N_1 , N_2 и N_3 , первый приятель дальше от второго, чем от третьего. Если для

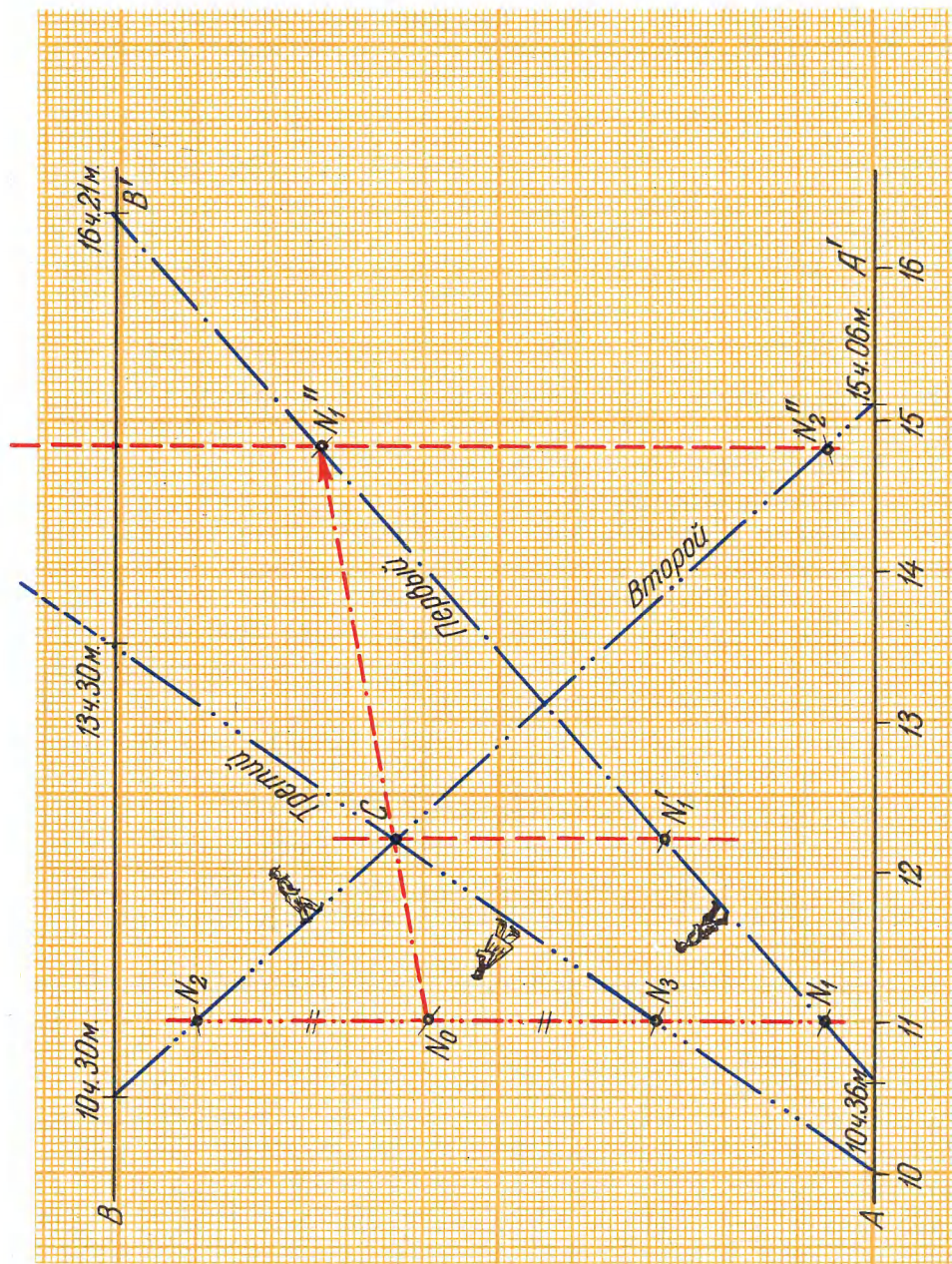


Рис. 78.

проведенной вертикали, или для какой-то другой, будем иметь $N_1 N_2 = N_1 N_3$, то это и покажет, что в соответствующий момент времени первый приятель находится на одинаковых расстояниях от второго и третьего.

Ответ на первый вопрос задачи и будет указывать именно такая точка N_1 на пересечении некоторой вертикали с графиком движения первого приятеля, для которой $N_1 N_2 = N_1 N_3$.

Эту точку легко найти, например, при помощи такого построения: разделим пополам отрезок $N_2 N_3$ (где $N_2 N_3$ — произвольная вертикаль, не проходящая через точку C) и через получившуюся точку N_0 и точку C проведем прямую $N_0 C$ до пересечения в точке N'_1 с графиком движения первого приятеля. Получившаяся в этом пересечении точка N'_1 является искомой, по крайней мере, в геометрическом смысле.

В самом деле, так как по построению прямая $N_0 C$ делит пополам вертикальный отрезок $N_2 N_3$, заключенный между прямыми (синими), проходящими через точку C , то она делит пополам и любой другой вертикальный отрезок, заключенный между теми же прямыми (докажите!).

Следовательно, $N'_1 N'_2 = N'_1 N'_3$ (точка N'_3 пересечения вертикали с графиком движения третьего приятеля находится за пределами чертежа).

Дает ли при этом точка N'_1 ответ на первый вопрос задачи — это зависит от толкования условия задачи. В условии задачи не сказано, прекратил ли свою прогулку третий приятель по прибытии в B или продолжал идти дальше. Если третий приятель продолжал свою прогулку, то точка N'_1 отвечает на поставленный вопрос; если же он прекратил движение, то точка N'_1 не удовлетворяет условию задачи, так как вертикаль, проведенная через точку N'_1 , в этом случае встретилась бы не с графиком движения третьего, а лишь с продолжением этого графика (штриховая линия на рисунке).

Второй вопрос: когда третий приятель был вдвое ближе ко второму, чем к первому?

Повторим чертеж с графиками движения трех приятелей и опять проведем произвольную вертикаль $P_1 P_2$, не проходящую через точку E (рис. 79).

Отрезок $P_1 P_2$ изображает расстояние между первым и вторым приятелями в некоторый момент времени. Разделим точкой P'

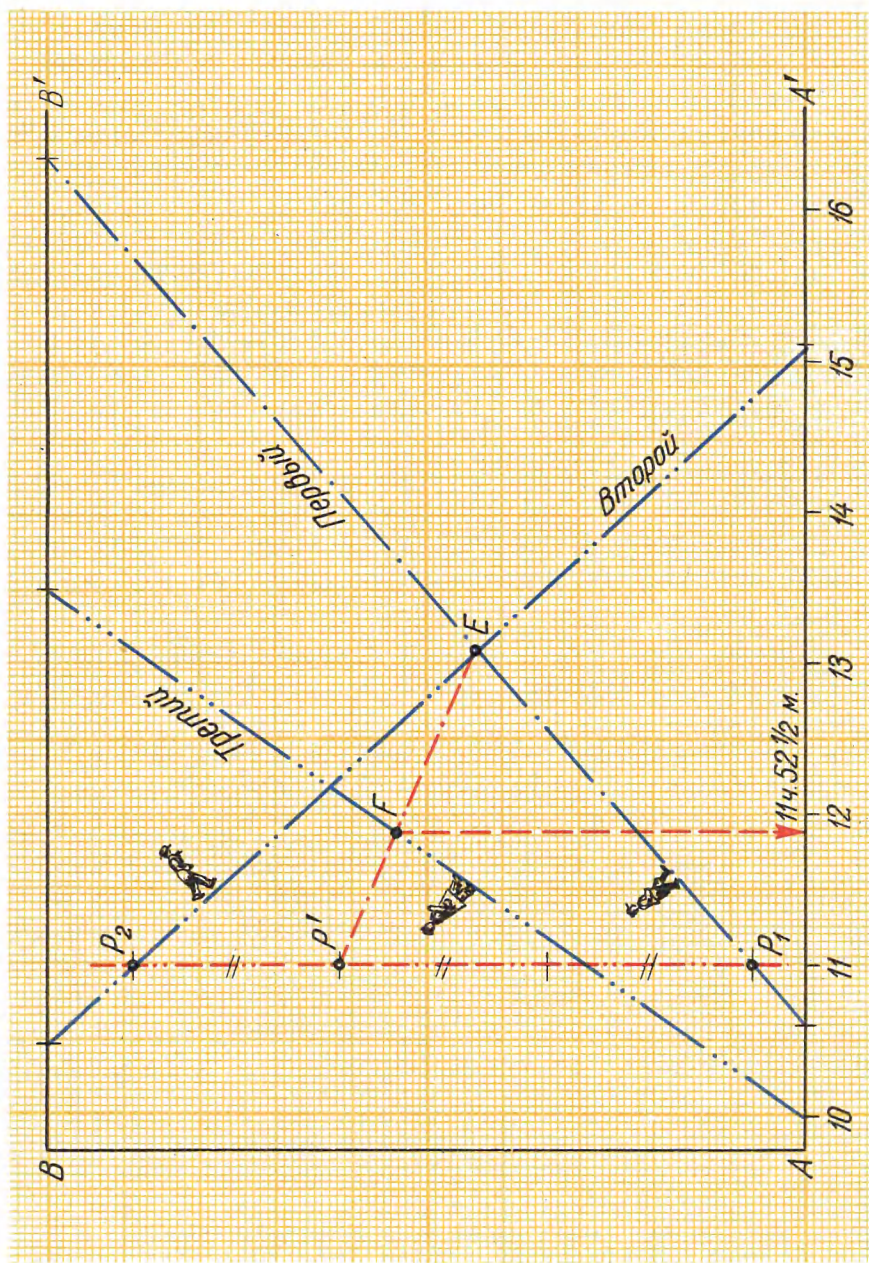


Рис. 79.

отрезок P_1P_2 в отношении $P_2P':P'P_1=1:2$. Точку P' соединим прямой линией с точкой E пересечения графиков движения первого и второго приятелей. В пересечении прямой $P'E$ с графиком движения третьего приятеля получим точку F , проекция которой на ось времени и укажет искомое время: 11 час. 52 $\frac{1}{2}$ мин. (На какой теореме основан этот геометрический прием получения ответа на поставленный вопрос?)

Третий вопрос: какие пункты пути между A и B приятели проходили через равные промежутки времени друг после друга?

Повторим еще раз чертеж с графиками движения трех приятелей (рис. 80).

Разделим точкой K' пополам отрезок оси времени между точками 10 час. 00 мин. и 15 час. 06 мин. и соединим эту точку прямой с точкой C . Каждая точка прямой CK' является серединой проведенного через эту точку горизонтального отрезка, заключенного между графиками движения второго и третьего приятелей и, следовательно, ее проекция на ось времени указывает середину интервала между моментами прохождения вторым и третьим приятелями одного и того же пункта на пути AB . А сам этот пункт указывается проекцией той же точки на вертикаль AB .

Теперь ясно, что точка K_1 пересечения прямой CK' с графиком движения первого приятеля является одной из искомых точек, так как $K_1K_3=K_1K_2$. Ее проекция K на вертикаль AB укажет то место пути AB , через которое первый приятель пройдет на некоторый промежуток времени (найдите, какой?) позже третьего, но на такой же промежуток времени раньше второго.

Аналогично, при помощи вспомогательной прямой $L'L''$ находим точку L_2 такую, что $L_2L_3=L_2L_1$. Проекция точки L_2 на вертикаль AB укажет то место пути AB , через которое второй приятель пройдет на некоторый промежуток времени позже третьего, но на такой же промежуток времени раньше первого.

Наконец, при помощи вспомогательной прямой EM' (серединой какого отрезка является точка M' ?) находим точку M_3 такую, что $M_3M_2=M_3M_1$. Проекция M точки M_3 на вертикаль AB укажет то место пути AB , через которое третий приятель пройдет на некоторый промежуток времени позже второго, но на такой же промежуток времени раньше первого.

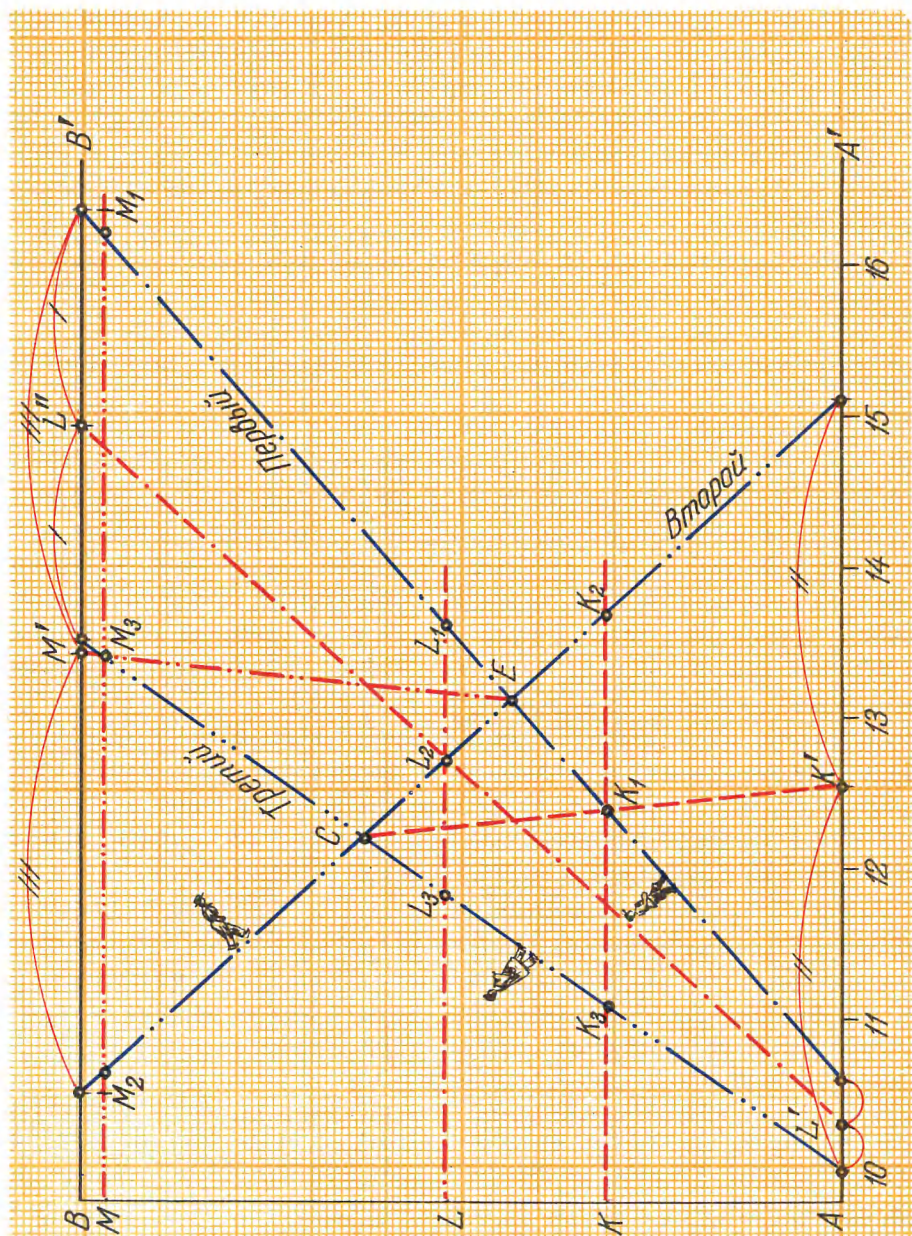


Рис. 80.

ЧЕТЫРЕ САМОЛЕТА

Даны графики движения самолетов № 1 и 2, совершающих рейсы из пункта A в пункт B , и графики движения самолетов № 3 и 4, совершающих рейс из B в A (рис. 81), причем в течение некоторого промежутка времени все четыре самолета находятся одновременно в воздухе.

По сигналу, передаваемому по радио, все четыре самолета должны прервать движение по своему графику и, не изменяя скоростей движения, лететь в пункт C , расположенный между A и B . (При этом возможен и обгон в воздухе самолета, следующего параллельным курсом.)

По данным графикам определите геометрически:

1) В какой момент времени T (еще до окончания рейса хотя бы одним самолетом) нужно передать сигнал для того, чтобы промежуток времени от подачи сигнала до прибытия в C последнего самолета был бы наименьшим?

2) Какой пункт сбора следует назначить для того, чтобы по сигналу, переданному в данный момент t (рассмотреть разные моменты t в качестве задуманных), все четыре самолета слетелись в кратчайший промежуток времени после подачи сигнала. Если задуманный момент t подачи сигнала окажется таким, что к этому моменту какой-либо из самолетов уже достиг конечного пункта рейса и сделал посадку, то такому самолету по сигналу надлежит немедленно взлететь и двигаться к назначенному пункту с обычной своей рейсовой скоростью.

Временем, затрачиваемым на повороты, пренебречь.

Решение

Ответ на оба вопроса будем искать непосредственно на данном чертеже.

Найдем ответ на первый вопрос.

Проведем через точку C прямую, параллельную оси времени, и отметим на ней четыре точки C_1, C_2, C_3 и C_4 пересечения с графиками движения всех самолетов. Проекции этих точек на ось времени указывают моменты, когда каждый из самолетов пролетит пункт C .

Точка C , показывает, что самолет № 3 пролетает пункт C позже всех: значит, сигнал к слету самолетов в этот пункт надо дать в такой момент времени, чтобы и пролетевшие уже этот пункт самолеты, повернув обратно, прибыли в пункт C не позже самолета № 3: либо одновременно с ним, либо раньше.

Определим, когда каждому из самолетов № 1, 2 и 4 надо повернуть обратно, чтобы прилететь в пункт C одновременно

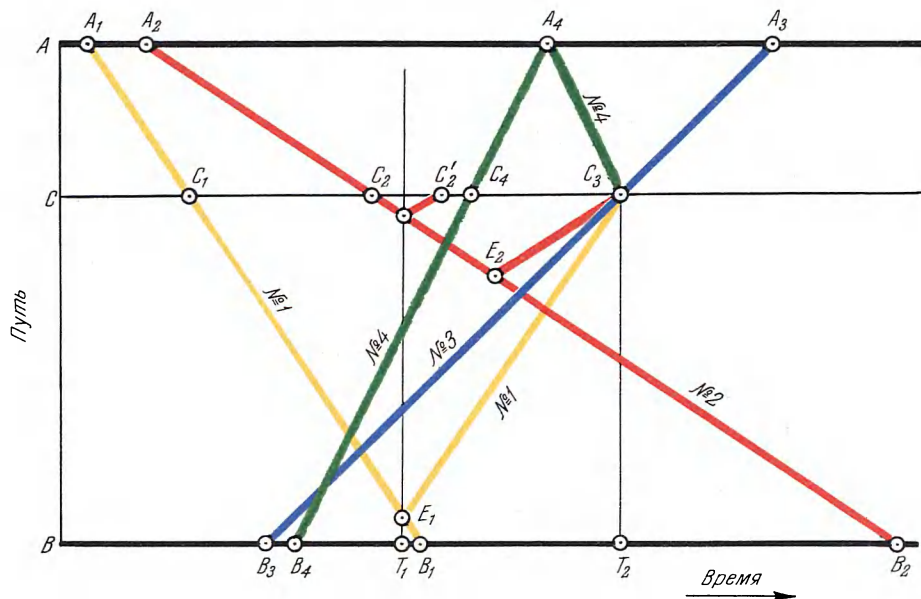


Рис. 81.

с самолетом № 3. Для этого вспомним, что при неизменной скорости движения оба звена ломаного графика полета «туда» и «обратно» образуют равные углы с любой прямой, параллельной оси времени. Поэтому проводим три отрезка из точки C , так, чтобы образовались равнобедренные треугольники $C_1E_1C_2$, $C_2E_2C_3$ и $C_3A_4C_4$. Тогда проекции вершин E_1 , E_2 и A_4 этих треугольников на ось времени и укажут соответственно те моменты времени, когда должны повернуть обратно самолеты № 1, 2 и 4, чтобы прилететь в C одновременно с самолетом № 3. Замечаем, что это всё — разные моменты времени. В какой же из этих моментов надо дать

сигнал к слету всех самолетов в пункт C в кратчайшее время после подачи сигнала?

Докажем, что искомый момент времени T_1 соответствует точке E_1 . В самом деле, пусть все самолеты получили сигнал в момент T_1 , тогда самолеты № 3 и 4 продолжают идти своим курсом, причем самолет № 4 прибывает в пункт C (точка C_4) раньше, чем самолет № 3 (точка C_3); самолет № 1 немедленно поворачивает обратно

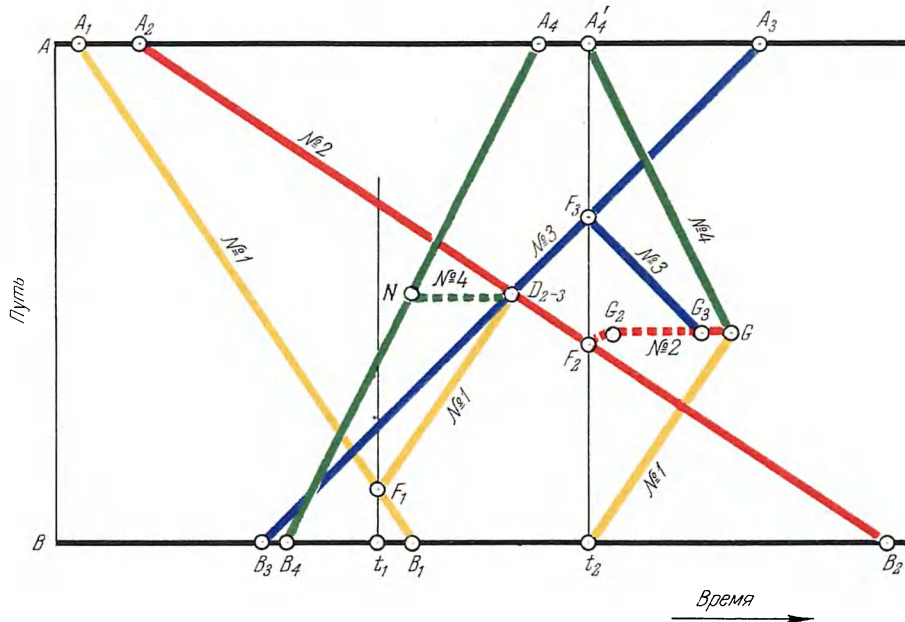


Рис. 82.

и прибывает в пункт C одновременно с самолетом № 3 (точка C_3); самолет № 2 повернет обратно и прибует в пункт C в момент, определяемый точкой C'_2 . При этом от момента подачи сигнала (T_1) до момента окончания слета всех самолетов пройдет промежуток времени, соответствующий отрезку $T_1 T_2$, где точка T_2 — проекция точки C_3 на ось времени.

Если момент сигнала сдвинуть влево от точки T_1 , то промежуток времени от сигнала до окончания слета увеличится за счет того, что в этом случае после сигнала третий самолет будет лететь дольше. Если момент сигнала сдвинуть вправо, скажем,

на t единиц времени (но не дальше точки B_1 , так как в этот момент закончился бы рейс самолета № 1), то самолет № 1 успеет еще более удалиться от пункта C и вернется в пункт C позже, чем в первом случае, на t_1 единиц времени, причем по графику видно, что $t_1 > t$; значит, и сдвиг момента сигнала вправо удлинит бы рассматриваемый промежуток времени. Убедитесь сами (по чертежу), что если сигнал дать, например, в момент B_1 , то промежуток времени от этого момента до момента прибытия самолета № 1 в пункт C (в этом случае он прибудет позже остальных) удлинится на отрезок вдвое больший, чем $T_1 B_1$.

Для получения ответа на второй вопрос задачи надо вновь построить заданные графики, отметить на оси времени какую-либо точку t в качестве изображения заданного момента подачи сигнала, а затем уже отыскивать точку, указывающую то место слета самолетов, которое удовлетворяло бы условию задачи.

Поиски решения для каждого конкретного случая могут послужить темой для самостоятельных упражнений.

В качестве примера, на рис. 82 показано решение задачи для двух случаев: 1) если в заданный момент t_1 подачи сигнала состоялись три из пяти встреч в воздухе и 2) если в момент t_2 подачи сигнала уже состоялись все пять встреч в воздухе.


В первом случае место слета указывает проекция точки D_{2-} на вертикаль AB , а во втором случае — проекция точки G на ту же вертикаль AB . Самостоятельно убедитесь в том, что выбранные пункты слета в обоих случаях обеспечивают наименьший возможный промежуток времени от момента подачи сигнала до момента окончания слета самолетов в указанных пунктах.

Упражнение. Для данных графиков движения самолетов выберите такой момент подачи сигнала и такое место слета самолетов, чтобы промежуток времени от момента подачи сигнала до момента окончания слета самолетов в указанном месте был самым меньшим из всех возможных.

КНИГИ, ОТКУДА ВЗЯТЫ УСЛОВИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ¹⁾

- (А. А.) — И. И. Александров, А. И. Александров, Методы решения арифметических задач, 1953 г.
- (А. В. Н. С.) — Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин, Сборник задач по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы, Изд. 2-е, 1954 г.
- (Б.) — Е. С. Березанская, Сборник задачи и упражнений по арифметике, 1950 г.
- (Г.) — П. Ю. Германович, Вопросы и задачи на соображение, 1956 г.
- (И. И. Ш.) — В. А. Игнатъев, Н. И. Игнатъев, Я. А. Шор, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1955 г.
- (К.) — Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, Изд. 3-е, 1956 г.
- (Л.) — П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, ч. II, 1955 г.
- (М.) П. С. Моденов, Сборник задач по математике, 1954 г.
(М. в Ш.) — Журнал «Математика в школе».
- (П.) — Г. Б. Поляк, Занимательные задачи, 1948 г.
- (П. С.) — С. А. Пономарев и Н. И. Сырнев, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1955 г.
- (У. М. Н.) — Журнал «Успехи математических наук».

¹⁾ В скобках указаны сокращенные обозначения, помещенные после условия задач.



СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава первая ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИАГРАММ

Братья и сестры	9
Обед втроем	12
Два бидона	14
Два сосуда	15
Косцы	19
Наследство	21
Переливание воды	23

Глава вторая ПРИМЕНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ДИАГРАММ

Вспомогательная теорема и не- сколько построений	29
Поезд	34
Работа выполнена досрочно	37
Теплая и холодная вода	39
Наборщики	40
Три сплава	44
Быки на лугу	46
Снова поезд	52

Глава третья ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Расчет токаря	59
Дрова	62
Олимпиада	64
Котлованы	66
Какие яблоки дешевле?	69
Картинки	71
Покупка мяча	72
Отец и сын	74
Я и Вы	76
Конфеты	77
Бассейн	80
В библиотеке	82
Грибники и пятиалтынные	84
Яблоки и груши	87

Глава четвертая ГРАФИК РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Два туриста	91
Еще два туриста-пешехода	92
Туда и обратно	95
Пассажирский теплоход	97
Два поезда	98
Я и троллейбусы	102
Двое движутся по окружности	105
Два велосипедиста	106

Глава пятая ПРИМЕНЕНИЕ ЛОМАНЫХ ГРАФИКОВ

Инженер и «Победа»	112
Три машинистки	114
Двенадцать хлебов	115
Бетонные блоки	118
Репетитор	121
Снова три сплава	123
Орехи	127
Чан	129
Бассейн	130
Автобусы	134

Глава шестая ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ К ГРАФИКАМ

Два сосуда	140
Самолет и ветер	142
Два самолета и ветер	146
Пловец и шляпа	147
Экскурсия	149
Муха	150
Два приятеля и еще один	156
Четыре самолета	163

Книги, откуда взяты усло- вия некоторых задач	167
------------------------------------------------------------	-----

Цена 4 р. 20 к.

